

# **Geometrische Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen**

**I n a u g u r a l – D i s s e r t a t i o n**

zur

Erlangung des Grades

Doktor–Ingenieur

(Dr.–Ing.)

der

Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität

zu Bonn

vorgelegt am 21. November 2002 von

**Andre Braunmandl**

aus Recklinghausen

Referent: Prof. Dr.–Ing. Wolfgang Förstner

Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Hans–Peter Helfrich

Tag der mündlichen Prüfung: 01. August 2003

# Geometrische Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen

## Abstract

Die Bedeutung digitaler Informationsträger bei der Bearbeitung kartographischer Fragestellungen wächst zunehmend. Um den damit ebenfalls wachsenden Anforderungen zu genügen, sind Konzepte zu entwickeln, die die Besonderheiten des digitalen Mediums ausnutzen. In diesem Zusammenhang beschäftigt sich diese Arbeit mit der geometrischen Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen (DHM).

Auf Grund der Vielzahl der mit der Generalisierung von DHM verbundenen Probleme, werden zuerst die hier bedeutsamen zentralen Begriffe definiert. Auf dieser Basis wird eine Abgrenzung des in dieser Arbeit behandelten Problems vorgenommen. Allgemein gliedert sich die Generalisierung von DHM in die geometrische und die thematische Generalisierung. Auf die Aspekte der thematischen Generalisierung wird in dieser Arbeit nur so weit eingegangen, wie es zur Behandlung der geometrischen Generalisierung notwendig ist.

Die Skala eines DHM ist für die geometrische Generalisierung der zentrale Begriff zur Beschreibung von DHM. Für das initiale DHM wird die Skala durch den Vorgang der Erfassungsgeneralisierung festgelegt. Um dies mathematisch zu beschreiben, werden im Rahmen der Signaltheorie entwickelte Techniken der Bildverarbeitung eingesetzt, die weitere, im Folgenden genutzte, Kenngrößen zur Beschreibung von DHM liefern. Insbesondere kann die Geländeoberfläche durch die Textur des als Mess-Signal interpretierten DHM skalenabhängig charakterisiert werden.

Die geometrische Generalisierung eines DHM bewirkt einen Skalenübergang hin zu einer gröberen Skala bei der Beschreibung des DHM. Einen mathematischen Rahmen bildet hierfür die in der Bildverarbeitung etablierte Theorie der Skalenräume. Hiermit kann die Durchführung eines Skalenübergangs unter gewissen Bedingungen auf die Lösung eines instationären Diffusionsproblems zurückgeführt werden.

Zur Modellierung der geometrischen Generalisierung stellen wir uns die Geländeoberfläche zerlegt in punkt-, linien- und flächenartige Geländestrukturen vor. Diese verschiedenartigen Geländestrukturen unterscheiden sich durch ihren Formcharakter. Zur quantitativen Beschreibung des Formcharakters werden auf Basis der signaltheoretisch hergeleiteten Kenngrößen zwei Maße, die Prägnanz und die Anisotropie, definiert. Die geometrische Generalisierung wird dann im Rahmen der Theorie der Skalenräume als Diffusionsgleichung modelliert, die, über Parameter geregelt, den durch die Prägnanz und die Anisotropie beschriebenen Formcharakter skalenabhängig erhält.

Zur Lösung der hier formulierten Diffusionsgleichung wird eine Implementation auf Basis der Methode der Finiten Elemente vorgestellt. Hiermit berechnete Anwendungsbeispiele veranschaulichen die Wirkungsweise der Diffusionsgleichung.

Die in dieser Arbeit entwickelten Generalisierungswerkzeuge eröffnen einen neuen Zugang zur skalenabhängigen Untersuchung von DHM und sind ein erster Schritt zu einer umfassenden Methodensammlung zur Generalisierung von DHM. Eine künftige Implementation in ein GIS ist auf Grundlage der hier vorgestellten prototypischen Implementation möglich und wünschenswert.



# **Geometric Generalisation of Digital Elevation Models**

## **Abstract**

The importance of digital media for the investigation of cartographic questions is steadily increasing. To satisfy the equally growing demands, it is necessary to develop concepts, that exploit the particular features of the digital medium. In this context this thesis is concerned with the geometric generalisation of digital elevation models (DEM).

Because of the multiple problems connected with the generalisation of DEM, the central terms are defined at first. Based upon this, the restricted problem, that this thesis deals with, is outlined. In principle, the generalisation of DEM consists of geometric and thematic generalisation. In this thesis it is dealt with aspects of thematic generalisation only in so far, as it is needed for the investigation of geometric generalisation.

The scale of a DEM is the central term for the description of DEM concerning the geometric generalisation. For the initial DEM the scale actually is set by the generalisation due to the measurement process. To describe this mathematically, techniques developed in the scope of signal theory are applied. These techniques provide DEM describing characteristics, that are used in the following. Particularly the surface can be scale dependently characterised by the texture of the DEM, that is interpreted as a measurement signal.

Geometric generalisation realises a scale transition up to a coarser scale in the description of the DEM. A mathematical scope for this is given by scale-space theory, which is well established in the area of computer vision. Hereby the process of scale transition can be expressed under specific circumstances as the solution of a non stationary diffusion problem.

To model geometric generalisation, we describe the surface in terms of point like, line like and area like structures. The different surface structures can be distinguished by their form character. To describe the form character quantitatively, two characteristics, succinctness and anisotropy, are defined based on the characteristics derived from signal theory. In the scope of scale-space theory the geometric generalisation is modelled as a diffusion equation, that preserves the form character, which is described by succinctness and anisotropy, depending on scale and according to specific parameters.

We present an implementation based on the finite element method, that provides a solution of the developed diffusion equation. Examples demonstrate the properties of the diffusion equation.

The tools for generalisation developed in this thesis offer a new approach for the scale dependent examination of DEM and they are a first step in generating an extensive collection of methods for generalisation of DEM. A future implementation into a GIS based upon the presented prototypic implementation is possible and desirable.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
1.1	Begriffsklärung . . . . .	11
1.1.1	Die Skala eines DHM . . . . .	12
1.1.2	Geometrische und thematische Merkmale von Gelände . . . . .	14
1.1.3	Geometrische und thematische Generalisierung . . . . .	15
1.2	Bestehende Ansätze . . . . .	16
1.2.1	Ansätze zur Beschreibung und Rekonstruktion von Geländeoberflächen . . . . .	16
1.2.2	Ansätze zur Generalisierung von Geländeoberflächen . . . . .	20
1.3	Problemstellung und Arbeitsziele . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Grundlagen aus der Signalverarbeitung</b>	<b>25</b>
2.1	Die Erfassungsgeneralisierung . . . . .	25
2.1.1	Abtastung . . . . .	25
2.1.2	Rekonstruktion . . . . .	27
2.1.3	Nichtlineare Abtastung und Rekonstruktion . . . . .	31
2.1.4	Modell der Erfassungsgeneralisierung . . . . .	32
2.2	Beschreibung der Signaltextur . . . . .	33
2.2.1	Die Textur eines Signals . . . . .	33
2.2.2	Der krümmungsbasierte Strukturtensor . . . . .	36
2.2.3	Die Mittelungsparameter $\sigma^2$ und $\rho^2$ . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Skalenräume</b>	<b>39</b>
3.1	Skalenraum-Axiome . . . . .	40
3.1.1	Architektur-Axiome . . . . .	40
3.1.2	Stabilitäts-Axiom . . . . .	43
3.1.3	Morphologie-Axiome . . . . .	43
3.2	Der Gaußsche Skalenraum . . . . .	44
3.3	Nichtlineare Skalenraum-Modelle . . . . .	45
3.3.1	Das Perona-Malik Modell . . . . .	46
3.3.2	Kanten und Kohärenz verstärkende anisotrope Diffusion . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Geometrische Generalisierung</b>	<b>49</b>
4.1	Ziele einer geometrischen Generalisierung . . . . .	49
4.2	Beschreibung des Formcharakters . . . . .	52
4.2.1	Grundlage der Beschreibung . . . . .	53
4.2.2	Beschreibung der Prägnanz . . . . .	54
4.2.3	Beschreibung der Anisotropie . . . . .	58
4.3	Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung . . . . .	60
4.3.1	Lokal adaptive Diffusionsgleichung . . . . .	61
4.3.2	Fallbeispiele . . . . .	68
4.3.3	Skalenraum-Eigenschaften . . . . .	71
4.4	Geometrischer Informationsgehalt eines Digitalen Höhenmodells . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Lösung der Diffusionsgleichung</b>	<b>75</b>
5.1	Finite Elemente Modell . . . . .	75
5.1.1	Galerkin-Methode und Festsetzung der Randbedingungen . . . . .	76
5.1.2	Zeitdiskretisierung . . . . .	78
5.2	Implementation . . . . .	79
5.2.1	Aufstellung von Elementbeiträgen . . . . .	80
5.2.2	Wahl der Ansatzfunktionen . . . . .	80
5.2.3	Schätzung der zweiten Ableitungen . . . . .	83
5.2.4	Berechnung der Elementbeiträge . . . . .	85



<b>6 Beispiele</b>	<b>87</b>
6.1 Geometrische Generalisierung Digitaler Höhenmodelle . . . . .	88
6.1.1 Visueller Vergleich der Generalisierungsergebnisse . . . . .	91
6.1.2 Vergleich der Krümmungsverteilungen . . . . .	91
6.1.3 Geschätzter geometrischer Informationsgehalt . . . . .	94
6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle . . . . .	95
6.2.1 Phänomenologische Betrachtung . . . . .	102
6.2.2 Geschätzter geometrischer Informationsgehalt . . . . .	104
6.3 Weitere Beispiele . . . . .	107
<b>7 Zusammenfassung</b>	<b>113</b>
<b>Literatur</b>	<b>117</b>

## *Inhaltsverzeichnis*

# 1 Einleitung

Karten haben seit langer Zeit eine große Bedeutung für das menschliche Zusammenleben. Sie finden, wie durch historische Zeugnisse verbürgt ist, seit weit vor Christi Geburt Anwendung bei der Navigation zu Land und zu Wasser, zur Feststellung von Besitzverhältnissen oder allgemein zur Beschreibung von räumlichen Sachverhalten. Hierbei sind Karten Beschreibungen der Realität, an die der Anspruch gestellt wird, die für den jeweiligen Anwendungsbereich erforderlichen raumbezogenen Informationen in großer Dichte und Übersichtlichkeit auf einem kompakten Informationsträger bereitstellen zu können.

Geeignete Regeln und Verfahren zur Herstellung analoger Karten, die diesem Anspruch nach Möglichkeit genügen, sind ein wohlbekannter Teil der Kartographie (siehe zum Beispiel Imhof 1950). Mit den wachsenden Möglichkeiten der digitalen Rechentechnik stellen sich hier neue Aufgaben. Für die Nutzung raumbezogener Informationen auf digitalen Informationsträgern sind Konzepte notwendig, die den bekannten kartographischen Konzepten für analoge Informationsträger entsprechen und die Besonderheiten des digitalen Mediums ausnutzen (Miller und LaFlamme 1958).

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns aus der Perspektive dieser allgemeinen Aufgabenstellung mit der *geometrischen Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen*. Als Grundlage für die weiteren Kapitel erklären wir in diesem einführenden ersten Kapitel zunächst genau, was wir unter der geometrischen Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen verstehen. Anschließend stellen wir die mit der geometrischen Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen verbundenen Probleme zusammen mit bisherigen Lösungsansätzen dar. Auf diesem Hintergrund formulieren wir die Problemstellung für die vorliegende Arbeit und schließen damit dieses erste Kapitel ab.

## 1.1 Begriffsklärung

**Generalisierung** Die Generalisierung ist in der Kartographie eine wohlbekannte Aufgabe. Imhof (1972) beschreibt sie prägnant durch: „*Kartographisches Generalisieren heißt*

## 1 Einleitung

*sinnvoll vereinfachen*“. Ihre Bedeutung in der Kartographie gewinnt die Generalisierung aus dem de facto unbegrenzten Informationsreichtum der wahrnehmbaren Realität. Es ist prinzipiell unmöglich eine Beschreibung zu erstellen, die diesen Informationsreichtum vollständig und gut lesbar auf einer Karte oder einem anderen Informationsträger mit beschränkter Darstellungskapazität darstellt. Die Beschreibung muss daher sinnvoll vereinfacht, das heißt generalisiert werden, um deren Informationsgehalt so weit zu reduzieren, dass eine Darstellung möglich ist.

Die Bewertung der Sinnhaftigkeit einer möglichen Vereinfachung ist dabei nicht allein auf Basis der Informationen möglich, die für die reine Beschreibung zur Verfügung stehen. Es sind weitergehende Metainformationen über den Anwendungsbereich der Beschreibung notwendig, die die Grundlage dieser Bewertung bilden. Insbesondere gibt der Anwendungsbereich der Beschreibung einen inhaltlichen Rahmen vor, der eine Unterscheidung der der Beschreibung zur Verfügung stehenden Informationen nach ihrer *Relevanz* für den angezielten Anwendungsbereich erlaubt. Die Kunst der Generalisierung ist es, den inhaltlichen Rahmen durch die Konkretisierung der Unterscheidung von relevanten und nicht relevanten Informationen so zu füllen, dass alle relevanten Informationen auf dem gewählten Informationsträger in ihrer Gesamtheit als Beschreibung dargestellt werden können. Die sinnvollen Vereinfachungen bestehen dann im Weglassen der nicht relevanten Informationen.

**Digitale Höhenmodelle** Wir beschäftigen uns in der vorliegenden Arbeit mit der Generalisierung von Digitalen Höhenmodellen (DHM). Ein DHM beschreibt die *geometrische Gestalt eines Geländes*, die Geländeoberfläche, die durch Messung von Geländehöhen aus der Realität abgeleitet und in diskretisierter Form digital gespeichert wird (Stephani 1975). Für die Aufgabe der DHM-Generalisierung werden wir eine Generalisierungsvorschrift vorstellen, welche sich an der *kartographischen Generalisierung*, das heißt der Generalisierung bei der Erstellung einer Karte auf Grundlage größermaßstäbiger Karten, orientiert und Unterschiede zwischen analoger topographischer Karte und DHM berücksichtigt. Hierbei werden insbesondere die für die Generalisierung bedeutsamen Grundsätze (Hake 1982, Seite 200) „*Wichtiges erhalten, Unwichtiges fortlassen*“ und „*Charakteristisches betonen, Zufälliges zurückdrängen*“ Beachtung finden.

### 1.1.1 Die Skala eines DHM

**Erfassungsgeneralisierung und lokale Skala** Die Messung von Geländehöhen ist ein notwendiger Vorgang für die Erstellung eines DHM oder einer topographischen Karte. Er kommt nicht ohne eine Art der Generalisierung aus, die *Erfassungsgeneralisierung* (Hake 1982) genannt wird und die sich für die Erstellung eines DHM oder einer

topographischen Karte vom Grundsatz her nicht unterscheidet. Dabei ist vorab, gegebenenfalls ortsvariierend, für jede Lagekoordinate im zu vermessenden Bereich eine räumliche Umgebung vorzugeben.<sup>1</sup> Die Messung der Geländehöhen<sup>2</sup> muss anschließend für jede Lagekoordinate einen Höhenwert liefern, der charakteristisch für den Höhenverlauf in der vorgegebenen Umgebung ist. Je größer dabei die vorgegebene räumliche Umgebung in einem Ausschnitt ist, desto glatter ist dort im Allgemeinen der erfassungsgeneralisierte Höhenverlauf, da Details des Höhenverlaufs, die kleiner als die vorgegebene räumliche Umgebung sind, nur im Mittel wiedergegeben werden. Ausnahme hiervon können besondere Geländeformen, wie zum Beispiel Bruchkanten, sein, die als scharfe Kanten im erfassungsgeneralisierten Höhenverlauf erscheinen können, wenn dies im Einzelfall charakteristisch für den Höhenverlauf ist. Die Ausdehnung der an einer Lagekoordinate vorgegebenen räumlichen Umgebung bezeichnen wir als *lokale Skala* des dort erfassten Höhenwerts.

**DHM-Skala** Die lokale Skala ist im Sinne der Erfassungsgeneralisierung höchstens so groß wie die räumliche Ausdehnung der jeweils kleinsten relevanten lokalen Details des Höhenverlaufs zu wählen. Dieses Konzept findet seine Entsprechung im *Maßstab einer topographischen Karte*, der das Verkleinerungsverhältnis angibt, in dem eine Geländeoberfläche auf eine Karte abgebildet wird und aus dem sich eine räumliche Mindestgröße von Details als Bedingung ihrer graphischen Darstellbarkeit (Hake 1982) ergibt. Elementare Vorgänge der Generalisierung, wie zum Beispiel das Vergrößern, erlauben lokal eine Abweichung vom Kartenmaßstab, um relevante Details trotz Unterschreitung der Mindestgröße darstellbar zu machen.

In diesem Sinne werden wir, dem Maßstabs-Begriff entsprechend, unter der *Skala eines DHM* eine mittlere lokale Skala verstehen, auf der die Höhenwerte des DHM für den Höhenverlauf *insgesamt* charakteristisch sind und von der Abweichungen der lokalen Skala erlaubt sind. So werden im Mittel alle Details des Höhenverlaufs, die größer oder gleich der DHM-Skala sind, durch das DHM beschrieben.

**Räumliche Referenzgröße** Von der Skala eines DHM kann in diesem Sinne nur gesprochen werden, wenn sie ein eindeutiger Häufungspunkt der Verteilung der lokalen Skala über dem DHM ist, da sie ansonsten nicht charakteristisch für den Höhenverlauf insgesamt ist. Zwei Aussagen lassen sich hieraus ableiten.

---

<sup>1</sup>Gegebenenfalls muss der zum Einsatz kommende Sensor nach dieser Vorgabe ausgewählt werden.

<sup>2</sup>Die Höhenmessung erfolgt in der Regel an einzelnen Stellen und die Zwischenräume werden nach einer vorab festgelegten Interpolationsvorschrift bestimmt. Somit ist nach der Höhenmessung jeder Lagekoordinate des zu vermessenden Bereichs ein eindeutiger Höhenwert zugeordnet.

## 1 Einleitung

Erstens muss nicht jedes DHM durch eine einzige Skala zu charakterisieren sein, da die lokale Skala über einem DHM nicht einen eindeutigen Häufungspunkt aufweisen muss. Es können Anwendungsbereiche für DHM existieren, für die es sinnvoll ist, die lokale Skala ortsvariierend zu wählen.

Zweitens stellt der durch die Skala bezeichnete eindeutige Häufungspunkt eine *räumliche Referenzgröße* dar. Diese Referenzgröße ist im Sinne eines Schwellwerts ein Kriterium für die Beurteilung der Relevanz von Details des Höhenverlaufs und sie ist charakteristisch für ein entsprechendes DHM. Es sind weitere Definitionen von Skala möglich, die ein DHM über eine räumliche Referenzgröße charakterisieren. Förstner (2003) hat gezeigt, wie sich solche unterschiedlichen Definitionen unter gewissen Bedingungen ineinander überführen lassen.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Generalisierungsvorschrift basiert auf der Annahme, dass ein DHM durch eine Skala zu charakterisieren ist, und zielt damit nur auf Anwendungsbereiche, für die das Konzept „Skala“ als räumliche Referenzgröße sinnvoll ist.

### 1.1.2 Geometrische und thematische Merkmale von Gelände

**Geometrische Merkmale** Die bisherige Diskussion bezieht sich allein auf Geländeoberflächen. Wir sehen ein DHM als eine in einem Rechner repräsentierte<sup>3</sup>, ikonische Beschreibung einer Geländeoberfläche auf einer eindeutigen Skala. Diese Geländeoberfläche kann mittels des DHM an jeder Lagekoordinate durch *geometrische Merkmale* charakterisiert werden. Als geometrische Merkmale bezeichnen wir dabei nur Lage und Höhe, sowie die differentialgeometrischen Größen Neigung und Krümmung (siehe zum Beispiel do Carmo 1993), sofern sie definiert sind<sup>4</sup>. Für eine Generalisierung von DHM, die sich an der kartographischen Generalisierung von Geländebeschreibungen orientiert, ist an dieser Stelle zu berücksichtigen, dass eine Geländeoberfläche nur ein Bestandteil eines Geländes ist und weitere Bestandteile eines Geländes, wie zum Beispiel Bewuchs, Gewässer und Bebauung, durch ein DHM nicht beschrieben werden.

Die Geländeoberfläche selbst kann in Sinneinheiten unterteilt werden, denen über ihre, durch geometrische Merkmale beschriebene, geometrische Form hinaus eine Bedeutung zugewiesen wird. Ein Beispiel hierfür können Gewässernetze sein, die nicht nur zumeist auf eine konkave Oberflächenform hinweisen, sondern an sich für die Berechnung von Einzugsgebieten in der Hydrologie essentielle Informationen tragen. An die

---

<sup>3</sup>Zum Repräsentationsbegriff, sowie den im Folgenden verwendeten Begriffen „Wissen“, beziehungsweise „Wissensebene“, und „Konzept“ siehe (Reimer 1991).

<sup>4</sup>Falls die Erfassungsgeneralisierung an einzelnen Orten scharfe Kanten ergeben hat, ist dort Neigung und Krümmung nicht definiert.

Sinneinheiten können Bedingungen geknüpft sein, wie zum Beispiel ein baumartiger topologischer Zusammenhang bei Gewässernetzen. Im Folgenden werden wir auch auf diese nicht rein geometrischen Aspekte eingehen.

**Semantisches Modell** Eine nach den kartographischen Grundsätzen der Generalisierung erstellte topographische Karte ist eine symbolische Beschreibung eines Geländes, die graphisch dargestellt, beziehungsweise visualisiert wird. Die dabei verwendeten graphischen Symbole repräsentieren geometrische und thematische Merkmale des Geländes auf dem vorgegebenen Maßstab. Thematische Merkmale sind alle nicht geometrischen Merkmale (vergleiche Molenaar 1989) und erhalten ihre Bedeutung durch ein zu Grunde gelegtes maßstabsbezogenes *semantisches Modell*. Ein semantisches Modell für die kartographische Generalisierung beschreibt Gelände auf der Wissensebene. Es definiert dabei alle Konzepte, die auf dem vorgegebenem Maßstab für den angezielten Anwendungsbereich relevant oder für die Generalisierung notwendig sind.

**Thematische Merkmale** Die Geländebestandteile, die nicht Geländeoberfläche sind, sowie Sinneinheiten der Geländeoberfläche, denen im semantischen Modell eine Bedeutung zugemessen wird, sind einerseits durch ihre Lage und Gestalt mit der Geländeoberfläche verknüpft, was durch geometrische Merkmale ausgedrückt wird, und andererseits über ihre Bedeutung Konzepten des semantischen Modells zugeordnet, was durch *thematische Merkmale* ausgedrückt wird.

Zum Beispiel kann ein Geländebestandteil Straße durch geometrische Merkmale wie Lage oder Krümmung und thematische Merkmale wie Straßenart<sup>5</sup> oder topologischer Zusammenhang<sup>6</sup> charakterisiert werden.

### 1.1.3 Geometrische und thematische Generalisierung

**Kartographische Generalisierung (Folgekarten-Prinzip)** Die in der Kartographie als Folgekarten-Prinzip umschriebene Erstellung einer neuen Karte aus Karten größeren Maßstabs bezeichnet einen mit kartographischer Generalisierung verbundenen Maßstabswechsel der Darstellung. Dieser Maßstabswechsel bewirkt im Rahmen der kartographischen Generalisierung zweierlei.

---

<sup>5</sup>Zwei Beispiele für die Straßenart wären „Landstraße“ und „Autobahn“.

<sup>6</sup>Zwei Beispiele für den topologischen Zusammenhang wären „Zugehörigkeit zum geschlossenen Straßennetz“ und „Führt durch ein Dorf“.

## 1 Einleitung

**Thematische Generalisierung** Erstens kann mit dem Maßstab das grundlegende semantische Modell wechseln, da Modelle immer nur innerhalb eines festen Maßstabsbereichs gültig sind. Wird der gültige Maßstabsbereich des den Karten größeren Maßstabs zu Grunde liegenden vorhandenen semantischen Modells durch den Maßstabswechsel verlassen, muss für die neue Karte ein neues semantisches Modell aus dem vorhandenen abgeleitet werden. Die Konzepte des neuen semantischen Modells werden dabei vorrangig durch die elementaren Vorgänge des Zusammenfassens, des Auswählens und des Klassifizierens (Hake 1982) aus den Konzepten des vorhandenen semantischen Modells abgeleitet und in ihrer Relevanz neu bewertet. Diese *Modellgeneralisierung* führt im Rahmen der Kartengeneralisierung über die Darstellung der neuen Konzepte durch neue thematische Merkmale zu inhaltlichen Änderungen, die *thematische* (oder auch *begriffliche*) *Generalisierung* genannt werden.

**Geometrische Generalisierung** Zweitens gilt über die Bedingung der graphischen Darstellbarkeit für die neue Karte eine größere räumliche Referenzgröße, die Mindestgröße für die Darstellung von Details, als für die Karten größeren Maßstabs. Die Veränderung der geometrischen Merkmale zum Zwecke des Weglassens von Details, die in der neuen Karte nicht mehr relevant sind, wird *geometrische Generalisierung* genannt. Da sich die Relevanz von Details aus ihrer Zugehörigkeit zu Konzepten des grundlegenden semantischen Modells ergibt, worin die räumliche Ausdehnung der Details im Allgemeinen ein entscheidendes Relevanzkriterium darstellt, kann die geometrische Generalisierung nicht unabhängig vom grundlegenden semantischen Modell erfolgen.

## 1.2 Bestehende Ansätze

Wir werden nun versuchen aus der Vielzahl der Arbeiten, die sich mit der geometrischen Gestalt von Geländeoberflächen beschäftigen, die für die vorliegende Arbeit Wichtigsten vorzustellen. Den Schwerpunkt legen wir dabei auf Beiträge, die uns helfen eine *Modellvorstellung* von Geländeoberflächen zu entwickeln. Für Arbeiten, die mehr geomorphologische und geomorphometrische Aspekte behandeln, sei zum Beispiel auf Veröffentlichungen wie (Pike und Dikau 1995) verwiesen.

### 1.2.1 Ansätze zur Beschreibung und Rekonstruktion von Geländeoberflächen

**Rasterinterpolation** Die von der Modellvorstellung einer Geländeoberfläche her einfachste Methode geht von der Repräsentation eines DHM durch ein Raster aus. Die



Geländeoberfläche wird als stetige Graphenfläche interpretiert, die in regelmäßigen Abständen abgetastet wurde. Die Interpolation der Rasterpunkte läßt sich mathematisch auf Grund ihrer Regelmäßigkeit besonders bequem beschreiben (siehe zum Beispiel Hoschek und Lasser 1989). Die Standardverfahren sind hierbei die bilineare und die kubische Interpolation.

In diesem Rahmen haben zum Beispiel Zevenbergen und Thorne (1987) oder Evans (1980) Verfahren entwickelt, die an jedem Rasterpunkt eine Schätzung für die Neigung und die Krümmung der Geländeoberfläche liefern.

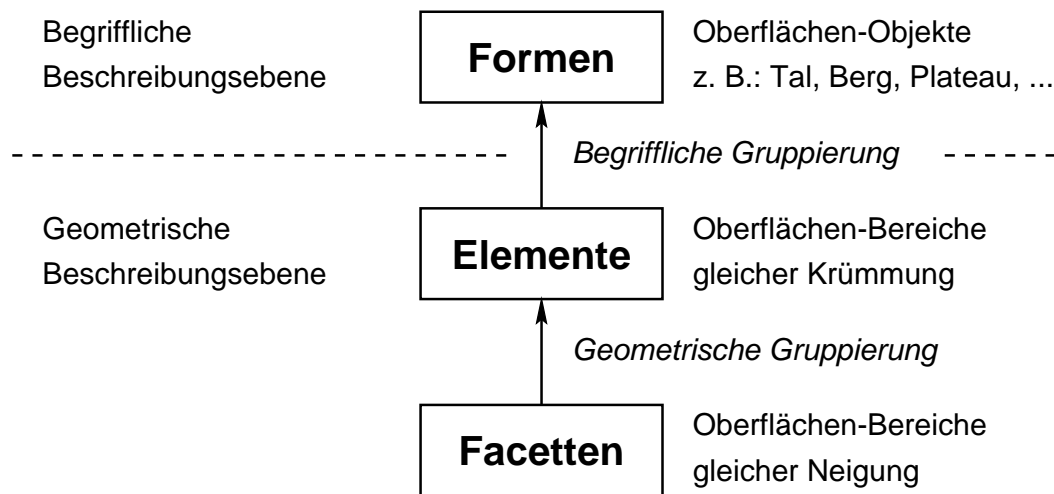
**Triangulation** Bei einer unregelmäßigen Abtastung der Geländeoberfläche werden zunächst die auf die Ebene projizierten Datenpunkte so durch Kanten verbunden, dass die konvexe Hülle der Datenpunkte vollständig durch nicht überlappende Dreiecke bedeckt ist und jeder Datenpunkt Knoten mindestens eines Dreiecks ist. Zur Auswahl der dafür zur Verfügung stehenden Alternativen der Dreiecksvermaschung dient ein vorzugebendes Kriterium. Standardkriterium für eine Dreiecksvermaschung ist das Delaunay-Kriterium (siehe zum Beispiel Preparata und Shamos 1985). Sowohl der Vorgang der Dreiecksvermaschung als auch das resultierende Dreiecksnetz werden Triangulation genannt.

Zur Verbesserung einer Delaunay-Triangulation haben zum Beispiel Heitzinger und Kager (1999) Strukturlinieninformationen genutzt, indem sie jeweils lokal vom Delaunay-Kriterium abweichen und die Vermaschungsregeln den lokalen Strukturlinieninformationen anpassen. Die Qualität des Ergebnisses hängt hierbei direkt von der Qualität der verwendeten Strukturlinieninformationen ab.

**Topographic Primal Sketch** In Anlehnung an die Arbeiten von Marr (1982) haben Haralick et al. (1983) ein Verfahren zur topographischen Klassifikation entwickelt. Entsprechend ihrem lokalen Neigungs- und Krümmungsverhalten wird eine diskrete Oberflächendarstellung punktweise durch die Klassen *peak*, *pit*, *saddle*, *flat*, *ravine*, *ridge* oder *hillside* beschrieben, wobei *hillside* in die Unterklassen *inflection point*, *slope*, *convex hill*, *concave hill* und *saddle hill* unterteilt wird.

**Klassifikation von Reliefeinheiten nach Dikau (1988)** Ein Modell zur Beschreibung von Geländeoberflächen, welches insbesondere die praktischen Gesichtspunkte einer typisch geomorphometrischen Arbeit berücksichtigt, hat Dikau (1988) vorgestellt. Wie in Abbildung 1.1 dargestellt, wird in diesem Modell zwischen einer begrifflichen und einer geometrischen Beschreibungsebene unterschieden. Auf der begrifflichen Beschreibungsebene besteht eine Geländefläche aus Objekten, den so genannten Gelände-

## 1 Einleitung



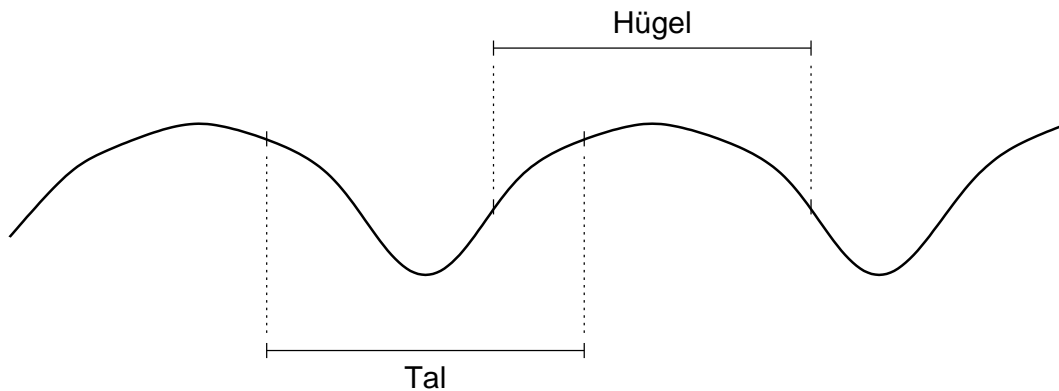
**Abbildung 1.1:** Geomorphometrische Sicht der Struktur einer Geländeoberfläche nach Dikau (1988).

Formen, die sich aus den Einheiten, den so genannten Gelände-Form-Elementen beziehungsweise Gelände-Form-Facetten, der geometrischen Beschreibungsebene zusammensetzen.

Dikau (1988) definiert Gelände-Form-Elemente als Oberflächenregionen mit gleicher Horizontal- und Vertikalkomponente der Normalenkrümmung und Gelände-Form-Facetten als Oberflächenregionen mit gleichem Neigungsvektor. Diese Definition, die durch die Datenverarbeitung motiviert ist, beinhaltet festzusetzende Schwellwerte, die eine eindeutige geometrische Regionenzuordnung garantieren.

Zwei Beispiele von Objekt-Klassen von Gelände-Formen wären „Hügel“ und „Tal“. Wie in Abbildung 1.2 an diesen beiden Beispielen angedeutet, kann eine Geländeoberfläche räumlich nicht eindeutig Gelände-Formen zugeordnet werden. Die räumlichen Träger der verschiedenen Gelände-Formen überschneiden sich in der Regel. So ist (ohne die Begriffe hier im Einzelnen zu definieren) der „Hang“, der den „Talboden“ mit der „Hügelkuppe“ verbindet, sowohl Teil des „Tals“ als auch des „Hügels“. Geometrisch als Einheit klassifizierte Elemente werden somit surjektiv auf die Instanzen der Objekt-Klassen abgebildet.

Weiterhin stellt Dikau (1988) fest, dass die Definition der Objekt-Klassen vom Anwendungsbereich abhängig ist, und dass daher Widersprüche in den unterschiedlichen Definitionen auftreten. Die begriffliche Beschreibung einer Geländeoberfläche setzt somit eine enge Abgrenzung des angestrebten Anwendungsbereichs voraus.



**Abbildung 1.2:** Beispiel der räumlichen Überschneidung verschiedener Gelände-Formen anhand eines künstlichen Geländeprofiles.

**Fourier-Spektrum** Tempfli (1982) untersucht das System „Diskrete Abtastung – Rekonstruktion“ von DHM und nutzt hierzu die Methoden der Spektralanalyse. Das DHM wird dabei durch sein Fourier-Spektrum beschrieben. Tempfli ist mit diesem auf einer Arbeit von Makarovič (1972) aufbauenden Vorgehen in der Lage, eine Genauigkeitsabschätzung von DHM zu liefern, die nach unterschiedlichen Einflussfaktoren differenziert ist und den Informationstransfer des betrachteten Systems beschreibt.

**Stochastische Modelle** Ebner (1979) modelliert Geländeprofile durch autoregressive Prozesse erster und zweiter Ordnung und leitet hieraus ein Interpolationsverfahren ab. Er stellt fest, dass dieser Ansatz für Prozesse zweiter Ordnung im Grenzfall auf die Interpolation durch Minimierung der Oberflächenkrümmung führt, was sich mit der Methode der finiten Elemente lösen lässt. Basierend auf diesem ersten Ansatz wird später (Ebner 1983) das Programmpaket HIFI (Höhen-Interpolation mit Finiten Elementen) zur Interpolation mit lokal adaptiver Krümmungsgewichtung entwickelt. In der vorliegenden Arbeit erweitern wird diesen Ansatz in Anwendung auf das uns gestellte Problem, indem wir anstelle der lokalen Krümmung das Krümmungsverhalten der Oberfläche in einer von der Skala des Bearbeitungsschritts abhängigen Umgebung (halblokale Schätzung) zur Adaption der Gewichte nutzen (siehe auch Kapitel 4).

Lindenberger (1986) baut auf den Arbeiten von Ebner auf und modelliert Geländeprofile über ARIMA (*autoregressive integrated moving average*) Prozesse. Er schätzt dabei die Prozessparameter zur Minimierung des Prädiktionsfehlers bei der Interpolation und weist nach, dass der Ansatz zweiter Ordnung von Ebner (1979) zu einfach ist, das heißt, dass höhere Prozessordnungen deutliche Steigerungen der Prädiktionsgenauigkeit bringen können.

## 1 Einleitung

**Fraktale** Zur Beschreibung und Simulation von Geländeoberflächen wendet Mandelbrot (1983) seine Theorie der fraktalen Geometrie an. Grundlage ist die Annahme der Selbstähnlichkeit (siehe hierzu auch Frederiksen, Jacobi und Kubik 1985). Wie Evans und McClean (1995) beschreiben, kann diese Annahme für Geländeoberflächen nicht realistisch sein. Ob die Theorie der Multifraktale an dieser Stelle erfolgreicher ist, ist zur Zeit eine offene Frage.

**Diffusionsgleichungen** Nogami (1995) stellt ein Verfahren zur Interpolation von Höhenlinien vor, das auf der Lösung einer homogenen, isotropen Diffusionsgleichung mit den Höhenlinien als Randbedingung beruht. Konzeptionell basiert das Verfahren auf einem von Hirano (1976) vorgestellten Ansatz zur Modellierung der Geländegenese, das heißt der zeitlichen Entwicklung von Gelände unter dem Einfluss physikalischer Prozesse.

Im Rahmen der Scale-Space-Theorie (siehe auch Kapitel 3) nutzt Weickert (1998) Diffusionsgleichungen zur strukturerhaltenden Glättung von digitalen Bildern. Dabei berücksichtigt er insbesondere linienartige Bildstrukturen, die wir ganz analog auch in DHM finden können (Kapitel 4).

Diese Arbeiten spannen einen konzeptionellen Rahmen zur Beschreibung von Geländeoberflächen auf, den wir in der vorliegenden Arbeit von der Seite der Generalisierung ergänzen werden.

### 1.2.2 Ansätze zur Generalisierung von Geländeoberflächen

**Generalisierung von DHM nach Gottschalk (1972)** Gottschalk (1972) geht in seinem Verfahren von einer Repräsentation des DHM durch Stützpunkte aus, die nach dem Verfahren von Hardy (1971) interpoliert werden. In einem ersten vorbereitenden Schritt wird die kleinste Untermenge der Stützpunkte gesucht, die notwendig ist, die Ausgangsoberfläche mit einer vorzugebenden Genauigkeit zu approximieren. Um die eigentliche Generalisierung durchzuführen, werden in einem abschließenden zweiten Schritt aus der ausgewählten Untermenge weitere Stützpunkte entfernt, deren Fortlassen den jeweils kleinsten Approximationsfehler verursacht.

Der Zusammenhang zwischen Generalisierungsgrad und Anzahl der im zweiten Schritt entfernten Punkte, wird über das Wurzelgesetz von Töpfer (1963) hergestellt. Da hierbei die Anzahl der Stützpunkte ein Maß für die Skala des DHM darstellt, ist das vorbereitende Entfernen der Stützpunkte, die vernachlässigbar zur Beschreibung der Oberfläche beitragen, notwendig. Der erste Arbeitsschritt stellt eine Anpassung der Oberfläche an

das Repräsentationsmodell dar und liefert für die Generalisierung die benötigte definierte Ausgangsposition.

Mit diesem Verfahren ist nach Konstruktion die geometrische Güte der Beschreibung eindeutig anzugeben. Es ist allerdings unklar, ob der Formcharakter des DHM in jedem Fall korrekt dargestellt wird. Das Verfahren liefert keine Hinweise, wie der Formcharakter zu definieren sei. Die Generalisierung wird damit auf eine rein geometrische Approximation reduziert.

**Generalisierung von DHM nach Weibel (1989)** Weibel (1989) geht von der Repräsentation eines DHM durch ein regelmäßiges Stützpunktraster aus. Das von ihm beschriebene Verfahren unterteilt sich in drei Hauptarbeitsschritte. Im ersten Schritt wird eine Strukturlinienextraktion durchgeführt, wobei für Weibel nur Fließwege und Kammlinien Strukturlinien sind. Diese Strukturlinien werden im zweiten Schritt nach kartographischen Gesichtspunkten generalisiert. Abschließend werden die generalisierten Strukturlinien zusammen mit weiteren Stützpunkten, an deren Lage eine Krümmung der Oberfläche berechnet wird, die oberhalb eines festgelegten Schwellwerts liegt, über eine Delaunay-Triangulation linear interpoliert. Das Ergebnis der Generalisierung wird so durch eine linear interpolierte Menge von Strukturlinien und Stützpunkten repräsentiert.

Der mit diesem Verfahren erreichte Generalisierungsgrad wird durch die Generalisierung der Strukturlinien vorgegeben, die in einer interaktiven Prozedur durchgeführt wird. So bestimmt der durchführende Kartograph entsprechend seinem kartographischen Wissen die vorzunehmenden Generalisierungsvorgänge und den daraus resultierenden Generalisierungsgrad. Das Verfahren stellt damit ein Bearbeitungswerkzeug für DHM dar und liefert aus sich heraus keinen Beitrag zum Verständnis des Begriffs der Skala eines DHM.

Wenn sich eine Geländeoberfläche im Wesentlichen durch eine Menge von Tal- und Kammlinien charakterisieren lässt,<sup>7</sup> erfüllt dieses Verfahren die zweite Forderung nach zutreffender Darstellung der Oberflächenformen, da diese in Form der Tal- und Kammlinien explizit dargestellt werden. Die geometrische Genauigkeit zwischen den Strukturlinien wird durch Stützpunkte verbessert, die nach einem Krümmungskriterium ausgewählt werden. Es ist dabei unklar, welche Auswirkungen dieses Kriterium auf die Genauigkeit der interpolierten Höhen hat. Vollständig unklar ist, wie die weiteren

---

<sup>7</sup>Da nicht jede Geländeoberfläche durch eine Menge von Tal- und Kammlinien, sowie zusätzlichen Punkten hoher Krümmung angemessen beschrieben werden kann (siehe zum Beispiel auch Koenderink und van Doorn 1997), ist das beschriebene Verfahren nicht für jeden Geländetyp sinnvoll. Weibel stellt für eine diesbezügliche Beurteilung ein automatisches Verfahren auf Basis einer Texturanalyse vor.

## 1 Einleitung

geometrischen Merkmale Neigung und Krümmung des generalisierten DHM mit dem Gelände zusammenhängen, beziehungsweise wie diese Merkmale bei der gewählten Repräsentation aus dem DHM abzuleiten sind.

### Zusammenfassung

Die vorgestellten Arbeiten zeigen komplexe Verfahren zur Generalisierung einer eingeschränkten Klasse von DHM und anspruchsvolle mathematische Modelle zur Beschreibung von DHM im Allgemeinen. Unserer Kenntnis nach ist noch kein Verfahren veröffentlicht worden, das in möglichst allgemeiner Weise DHM automatisch und, im Sinne kartographischer Anforderungen, zufriedenstellend generalisiert. Wir wollen versuchen diese Lücke ein Stück zu schließen und zeigen in der vorliegenden Arbeit, wie die geometrische Generalisierung durchgeführt werden kann, wenn für eine möglichst allgemeine Klasse von DHM in einem möglichst großen Skalenbereich grundlegende Forderungen (siehe Abschnitt 1.3) zu erfüllen sind.

### 1.3 Problemstellung und Arbeitsziele

An die Beschreibung der Gestalt einer Geländeoberfläche im Sinne der Kartographie werden zwei grundsätzliche Forderungen gestellt (Hake 1982, Seite 256), die sich direkt auf die geometrische Generalisierung beziehen.

**Forderung 1:** Die Beschreibung muss geometrisch ausreichend genau sein. (F1)

Diese erste Forderung bezieht sich auf die geometrischen Merkmale der Darstellung und interpretiert die Generalisierung als Approximation, an die Genauigkeitsanforderungen gestellt werden. Es ist zu klären, wie der *Approximationsfehler* für ein DHM auf der vorgegebenen Skala zu definieren und zu bewerten ist.

**Forderung 2:** Die Beschreibung muss die Oberflächenformen zutreffend erkennbar machen. (F2)

Im Zusammenhang mit der zweiten Forderung ist zu definieren, wie Oberflächenformen auf der vorgegebenen Skala zutreffend zu charakterisieren sind. Da dies über eine lokale Beschreibung durch ein geometrisches Merkmal hinaus geht, ist die Charakterisierung der Oberflächenformen, ihr *Formcharakter*, ein thematisches Merkmal. Zu klären ist dann, wie der Formcharakter durch die geometrische Generalisierung in der Beschreibung zu erhalten und auf der vorgegebenen Skala darzustellen ist.

### 1.3 Problemstellung und Arbeitsziele

**Aufgabe:** *Es ist eine geometrische Generalisierungsvorschrift zu finden, die aus einem vorgegebenem DHM mit vorgegebener Skala ein DHM auf beliebiger größerer Skala ableitet, dass beide gerade genannten Forderungen erfüllt.*

Um diese gestellte Aufgabe zu erfüllen, müssen wir im Wesentlichen zwei Arbeitsziele erreichen.

#### **Beschreibung des Formcharakters**

Grundlage der geometrischen Generalisierung ist die Festlegung eines geometrischen Geländeoberflächenmodells. Wir streben hierbei ein generisches Modell an, das so allgemeingültig wie möglich DHM beschreiben kann.

Zur Charakterisierung und Beschreibung von Geländeoberflächenformen im Geländeoberflächenmodell werden quantifizierbare Maße benötigt. Die Definition dieser Maße muss auf die Besonderheiten von Gelände eingehen und sie müssen aus den für ein DHM zur Verfügung stehenden Informationen berechnet werden können. Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit auf die folgenden zwei Aspekte der Formbeschreibung beschränken:

- Die *Prägnanz* einer Oberflächenform, das heißt, die relative Schärfe ihrer Ausprägung im Verhältnis zu ihrem Kontext, ist zu beschreiben.
- Eine *Anisotropie* der Oberflächenform ist zu beschreiben. Damit ist sowohl die Anisotropie einer großen einheitlichen Formeinheit, als auch das Auftreten vieler kleiner Formeinheiten in überwiegend kohärenter Ausrichtung gemeint. Wichtig ist in beiden Fällen einerseits die *Vorzugsrichtung* und andererseits der relative Ausprägungsgrad der Anisotropie.

Dem allgemein kontinuierlichen Verlauf von Geländeoberflächen entsprechend, müssen Maße für den Formcharakter einen kontinuierlichen Wertebereich haben. Da über die Maße Einfluss auf die geometrische Generalisierung genommen wird, muss der Wertebereich zur absoluten Einordnung der auftretenden Werte in interpretierbarer Weise beschränkt sein.

#### **Zerlegung der geometrischen Generalisierung in kleine Schritte**

Die geometrische Generalisierung gibt aus sich heraus keine Anhaltspunkte wie stark zu generalisieren ist, das heißt, es wird keine Skala von der geometrischen Generalisie-

## 1 Einleitung

rung bevorzugt.<sup>8</sup> Damit lässt sich die geometrische Generalisierung als eine Folge kleiner Generalisierungsschritte auffassen, die gleichberechtigt einen jeweils kleinen Skalenübergang bewirken. Die Summe aller kleinen Skalenübergänge spannt für ein DHM einen *Skalenraum* auf, in dem jeder Punkt einer Stufe der geometrischen Generalisierung entspricht.

Damit beschränkt sich die Modellierung der geometrischen Generalisierung auf die Spezifikation eines kleinen Generalisierungsschritts. Dabei sind alle Anforderungen an die geometrische Generalisierung von diesem kleinen Generalisierungsschritt so zu erfüllen, dass sie bei der Iteration für den gesamten Skalenraum gelten.

---

<sup>8</sup>Dies muss bei der inhaltlichen Generalisierung nicht der Fall sein, da ein Wechsel des semantischen Modells an diskrete Skalenstufen gekoppelt sein kann.



## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung

Zur Berücksichtigung des Formcharakters bei der geometrischen Generalisierung benötigen wir ein mathematisches Modell der sprachlichen Formbeschreibung. Da ein DHM Resultat eines Messvorgangs ist, werden wir hierzu ein DHM als ein gemessenes Signal im Sinne der Signaltheorie interpretieren. Dies führt uns auf folgende Fragen:

1. Welchen Einfluss hat die Erfassungsgeneralisierung auf das DHM-Signal?
2. Welche Kenngrößen charakterisieren das erfassungsgeneralisierte DHM-Signal?

Mit der Beantwortung dieser beiden Fragen werden wir in diesem Kapitel die Grundlage zu einer Definition des Formcharakters von DHM in Kapitel 4 legen.

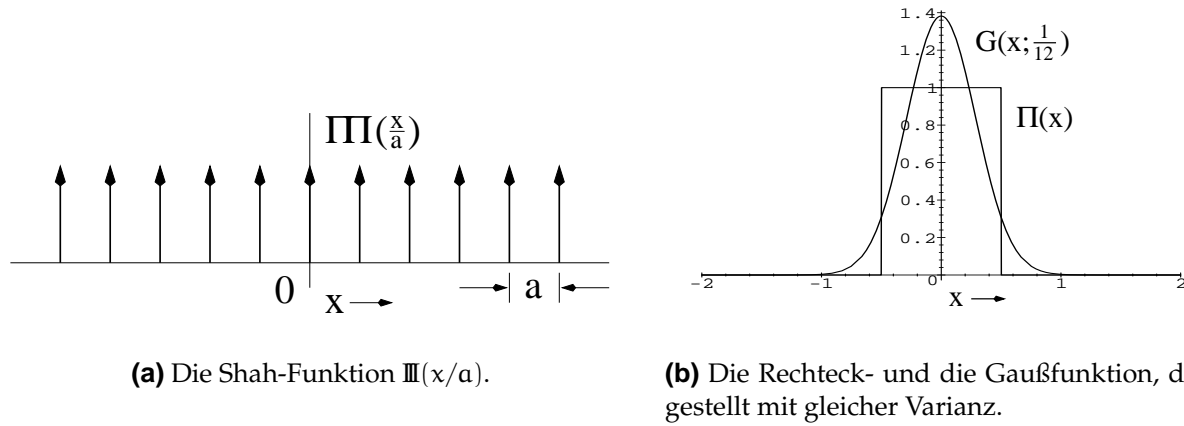
### 2.1 Die Erfassungsgeneralisierung

Wir werden die Erfassungsgeneralisierung in ihrer einfachsten Ausprägung, das heißt, homogen und isotrop, als das Zusammenspiel von Abtastung und Rekonstruktion beschreiben. Der Einfachheit halber wählen wir eine eindimensionale Darstellung. Die Ergebnisse im Zweidimensionalen ergeben sich analog. Für die technischen Details in diesem Zusammenhang sei auf Standardliteratur wie zum Beispiel (Castleman 1979) verwiesen. Für eine weiterführende, profunde Darstellung, die insbesondere Aspekte der Qualitätsbeurteilung von DHM beleuchtet, sei (Tempfli 1982) wärmstens empfohlen.

#### 2.1.1 Abtastung

Die Messung des DHM-Signals kann im einfachsten Fall als homogene isotrope Abtastung beschrieben werden. Dabei werden in einem regelmäßigen Abstand  $a$  die Hö-

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung



**Abbildung 2.1:** Die betrachteten Funktionen zur Beschreibung der Abtastung im Rahmen der Erfassungsgeneralisierung.

henwerte des zu vermessenden Geländebereichs erfasst. Wenn die Funktion  $f_o(x)$  das Gelände exakt beschreibt, dann kann die Abtastung durch eine Multiplikation mit der Shah-Funktion (Abbildung 2.1)

$$\mathbb{III}\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{a} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \delta(x - na)$$

beschrieben werden. Wir erhalten damit das abgetastete Signal

$$f_a(x) = f_o(x) \cdot \mathbb{III}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (2.1)$$

das im regelmäßigen Abstand  $a$  punktuell Werte von  $f_o(x)$  liefert.

Von der Erfassungsgeneralisierung wird gefordert, dass jeder Lagekoordinate ein repräsentativer Höhenwert zugewiesen wird. Die beschriebene Abtastung ist daher von einer idealisierten Punktabtastung zu einer repräsentativen Abtastung im Sinne der Erfassungsgeneralisierung zu erweitern. Wenn wir hierzu  $f_o(x)$  vor der Abtastung mit  $1/a\Pi(x/a)$  falten, wobei

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \pm\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Rechteckfunktion ist, erhalten wir

$$\overline{f}_{a\Pi}(x) = \left(f_o(x) * \frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\right) \cdot \mathbb{III}\left(\frac{x}{a}\right) = \overline{f}_{o\Pi}(x) \cdot \mathbb{III}\left(\frac{x}{a}\right). \quad (2.2)$$

## 2.1 Die Erfassungsgeneralisierung

Jeder Wert  $\bar{f}_a(x)$  ist Mittelwert von  $f_o(x)$  im Intervall  $[x - a/2, x + a/2]$  und damit repräsentativ für eine eindeutige räumliche Umgebung. Hierbei beschreibt die Rechteckfunktion die Abtast-Apertur des verwendeten Messsystems. Die Wahl der Apertur beziehungsweise Filterbreite ist im Falle des Rechteckfilters besonders leicht zu begründen. Wählt man nämlich, wie geschehen, die Aperturbreite gleich dem Abtastabstand  $a$ , wird eine vollständige, einfache Berücksichtigung aller Werte von  $f_o(x)$  erreicht.

Alternativ ist es möglich, andere mittelnnde, beziehungsweise glättende Funktionen zur Modellierung der Abtast-Apertur zu verwenden. Zum Beispiel kann man hier die Gaußfunktion

$$g(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.3)$$

einsetzen. Dazu ist zu klären, wie die Filterbreite  $a$  des Rechteckfilters mit der Varianz  $\sigma^2$  der Gaußfunktion in Zusammenhang steht.

Der Einfluss eines Filters auf ein stochastisches Signal kann durch die Filtervarianz quantifiziert werden, wenn der Filter als Dichtefunktion interpretiert wird. Man erhält für die Varianz der als Dichtefunktion interpretierten Rechteckfunktion

$$\text{Var} \left( \frac{1}{a} \Pi \left( \frac{x}{a} \right) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{a} \Pi \left( \frac{x}{a} \right) dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{a^2}{12}.$$

Wir erhalten also ein im statistischen Sinne gleiches Ergebnis der Abtastung, wenn wir an Stelle der Rechteckfunktion  $1/a \Pi(x/a)$  die Gaußfunktion  $g(x, \sigma^2)$  mit  $\sigma^2 = a^2/12$  zur Modellierung der Abtast-Apertur nutzen und schreiben

$$\bar{f}_{ag}(x) = \left( f_o(x) * g \left( x, \frac{a^2}{12} \right) \right) \cdot \text{III} \left( \frac{x}{a} \right) = \bar{f}_{og}(x) \cdot \text{III} \left( \frac{x}{a} \right). \quad (2.4)$$

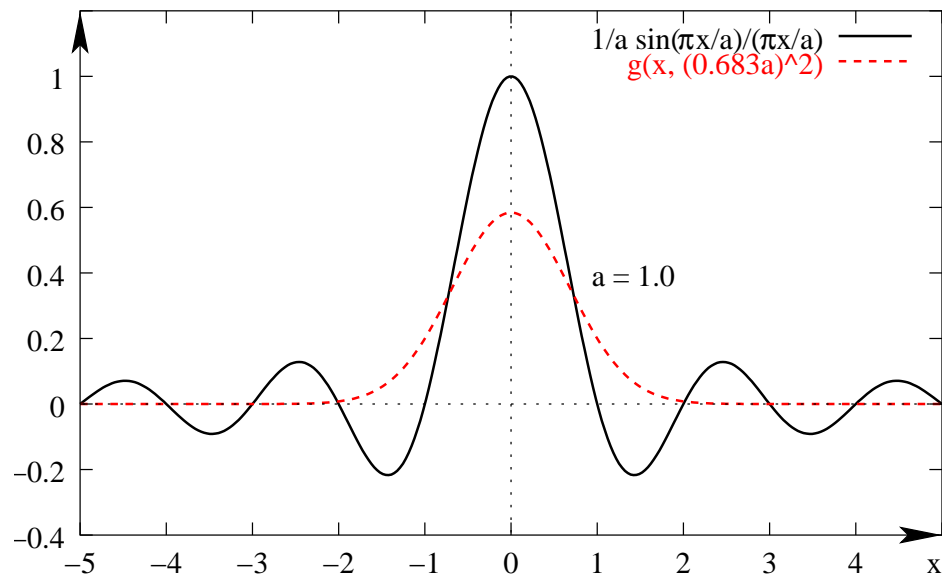
### 2.1.2 Rekonstruktion

Das Ergebnis der Abtastung ist eine Summe von  $\delta$ -Funktionen, die für sich genommen keine flächenhafte Oberflächenbeschreibung darstellen. Zu einem DHM gehört daher zu den durch Abtastung gewonnenen Messwerten eine Rekonstruktionsvorschrift, die für jede Lagekoordinate einen Höhenwert bereitstellt.

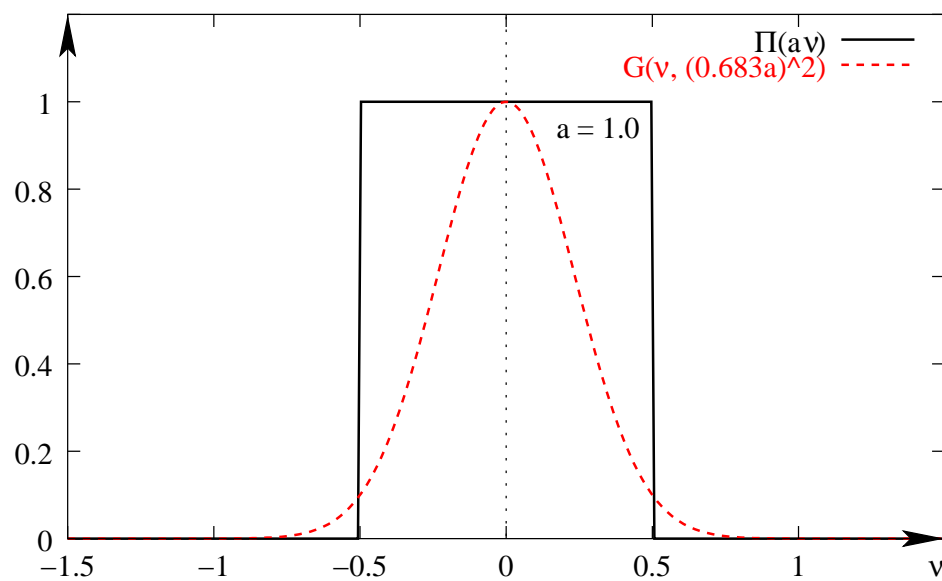
Falls das repräsentative Signal  $\bar{f}_o(x)$  bei der Frequenz  $\nu_0 = \frac{1}{2a}$  (Nyquist Frequenz) bandbegrenzt ist, können wir es durch Faltung mit  $\sin(x)/x$  rekonstruieren:

$$\bar{f}_o(x) = \bar{f}_a(x) * \frac{1}{a} \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a} = \bar{f}_o(x) \cdot \text{III} \left( \frac{x}{a} \right) * \frac{1}{a} \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}. \quad (2.5)$$

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung



**(a)** Faltung mit  $1/a \sin(\pi x/a)/(\pi x/a)$  oder  $g(x, (0.683a)^2)$  zur Rekonstruktion im Ortsraum.



**(b)** Multiplikation mit  $\Pi(av)$  oder  $G(v, (0.683a)^2)$  zur Rekonstruktion im Frequenzraum.

**Abbildung 2.2:** Die beschriebenen Funktionen zur Rekonstruktion im Orts- und Frequenzraum.

## 2.1 Die Erfassungsgeneralisierung

Die Erklärung hierzu finden wir durch eine Betrachtung der Abtastung im Frequenzraum. Die Fourier-Transformierte<sup>1</sup> einer Shah-Funktion ist wiederum eine Shah-Funktion

$$\mathcal{F}\left(\text{III}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = a \text{III}(av).$$

Einer Multiplikation im Ortsraum entspricht eine Faltung im Frequenzraum und umgekehrt. Daher erzeugt die Multiplikation mit  $\text{III}(x/a)$  im Frequenzraum Replikationen des Spektrums von  $\bar{f}_0(x)$  bei  $\pm n/a$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ . Wenn  $\bar{f}_0(x)$  bei der Frequenz  $\nu_0 = \frac{1}{2a}$  bandbegrenzt ist, überlappen sich die replizierten Spektren im Frequenzraum nicht und das Spektrum von  $\bar{f}_0(x)$  kann durch eine Multiplikation im Frequenzraum mit

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a} \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}\right) = \Pi(av)$$

ausgeschnitten werden, das heißt, die Replikationen des Spektrums von  $\bar{f}_0(x)$  werden vollständig entfernt und das abgetastete Signal wird vollständig rekonstruiert.

Wenn  $\bar{f}_0(x)$  nicht bandbegrenzt ist, überlagert sich das Spektrum mit seinen Replikationen. Ein Ausschneiden des Frequenzbereichs  $[-\nu_0, \nu_0]$  mit  $\Pi(av)$  schneidet die hohen Frequenzbereiche  $\nu < -\nu_0$  und  $\nu > \nu_0$  ab, die über die Replikationen einen Beitrag zu den Frequenzen im Intervall  $[-\nu_0, \nu_0]$  liefern. Dieser *Aliasing* genannte Effekt führt zu Verfälschungen der rekonstruierten Funktion gegenüber der abgetasteten Funktion.

Eine gängige Rekonstruktionsmethode, die die Auswirkung von Aliasing gegenüber (2.5) reduziert, ist eine Faltung mit der Gaußfunktion  $g(x, \sigma^2)$ , wobei  $\sigma^2 = k^2 a^2$  und  $k$  eine zu wählende Konstante ist. Dies entspricht im Frequenzraum der Multiplikation mit

$$\mathcal{F}(g(x, \sigma^2)) = G(\nu, \sigma^2) = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \nu^2}.$$

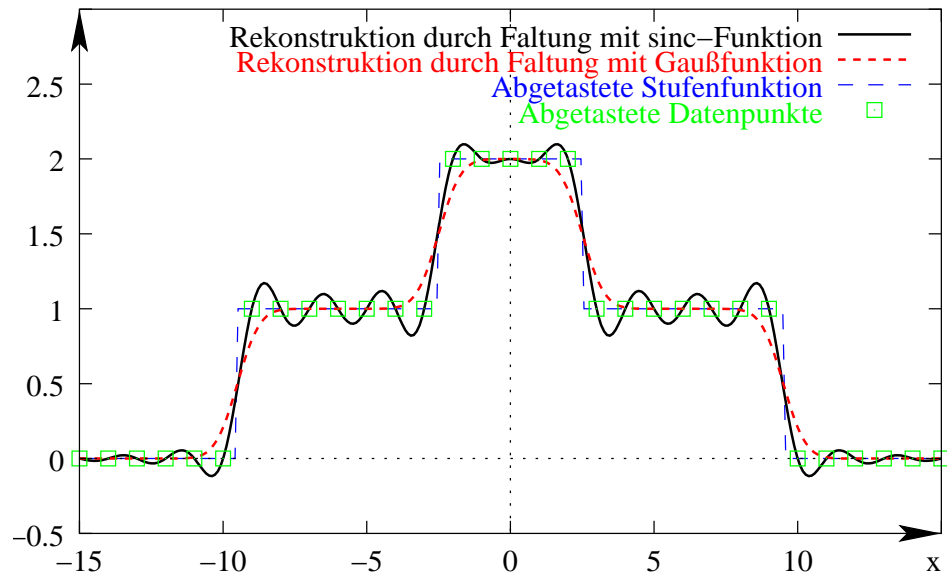
Wenn man von der Multiplikation mit  $G(\nu, \sigma^2)$  eine ähnlich abschneidende Wirkung wie von der Multiplikation mit  $\Pi(av)$  verlangt, indem man die Bedingung  $G(\nu_0, \sigma^2) \stackrel{!}{=} 0.1$  aufstellt, das heißt, fordert, dass hohe Frequenzen ab der Nyquist-Frequenz auf mindestens 10% gedämpft werden, erhält man  $k \approx 0.683$ .

Wie man in Abbildung 2.2 sieht, führt die Faltung mit einer Gaußfunktion auch zu einer Dämpfung von Frequenzen unterhalb der Nyquist-Frequenz und damit zu einem Informationsverlust. Dies ist in Abbildung 2.3a zu sehen, in der die Rekonstruktion einer nicht bandbegrenzten, abgetasteten Stufenfunktion dargestellt wird. Die Rekon-

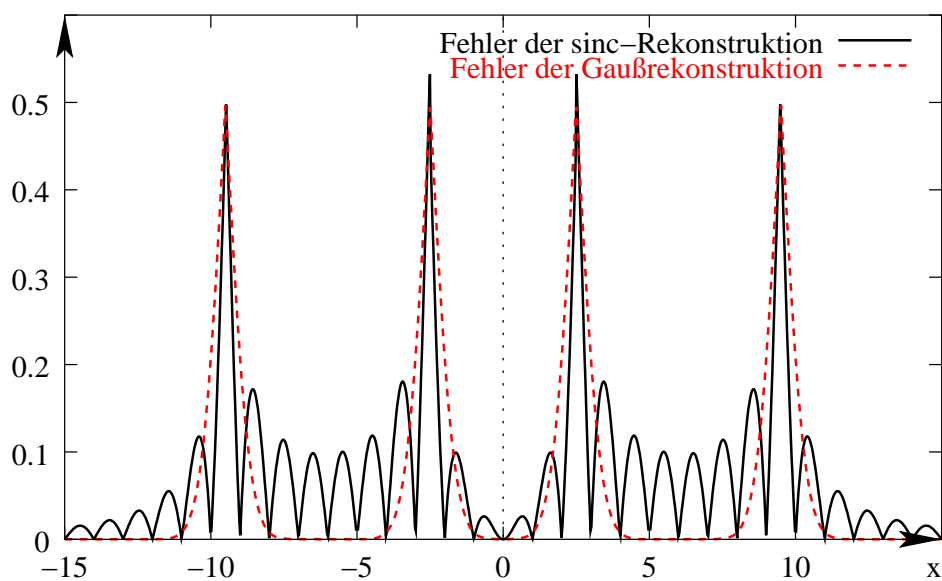
<sup>1</sup>Die Fourier-Transformierte einer Funktion  $f(x)$  ist gegeben durch (Castleman 1979)

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx.$$

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung



(a) Rekonstruktion der abgetasteten Werte.



(b) Fehlerbeträge der Rekonstruktion.

**Abbildung 2.3:** Rekonstruktion durch Faltung mit  $\frac{1}{a} \frac{\sin(\pi x/a)}{(\pi x/a)}$  und  $g(x, (0.683a)^2)$  am Beispiel einer abgetasteten Stufenfunktion.

struktions mit  $1/a \sin(\pi x/a) / (\pi x/a)$  interpoliert einerseits exakt die vorgegebenen Höhenwerte der Stufenfunktion und führt andererseits zwischen den abgetasteten Werten zu Aliasing-Schwingungen. Im Gegensatz hierzu approximiert eine Rekonstruktion mit  $g(x, k^2 a^2)$  die vorgegebenen Höhenwerte und führt zu einem glatten Verlauf zwischen den abgetasteten Werten. Dieses Verhalten ist wünschenswert, wenn das abgetastete Signal wie im Beispiel der Stufenfunktion nicht bandbegrenzt ist, da hierdurch der mittlere Rekonstruktionsfehler verringert wird. Wie in Abbildung 2.3b zu sehen ist, treten in beiden Rekonstruktionsbeispielen die größten Fehlerbeträge an den Stufenkanten auf. Allgemein sind hohe Krümmungen (relativ zur Nyquist-Frequenz gesehen) durch globale Verfahren nicht zuverlässig zu rekonstruieren.

### 2.1.3 Nichtlineare Abtastung und Rekonstruktion

Die bisherige Betrachtung bezieht sich auf den einfachsten Fall einer homogenen, isotropen DHM-Erfassung. Gemäß der Aufteilung in Abtastung und Rekonstruktion bestehen prinzipiell zwei Ansatzpunkte die DHM-Erfassung zu optimieren, indem beim Erfassungsvorgang lokal adaptiv auf Orte mit hoher Krümmung der zu vermessenden Geländeoberfläche eingegangen wird.

#### Adaptive Abtastung

Die Berücksichtigung von Orten hoher Oberflächenkrümmung kann während der Abtastung vorgenommen werden, indem nur Höhenwerte an ausgewählten Lagekoordinaten ermittelt werden und zu jedem Höhenwert eine lokale Rekonstruktionsvorschrift bestimmt wird, die bezüglich der Oberflächenform lokal den besten Beitrag zur Rekonstruktion liefert. So können zum Beispiel Bruchkanten in ihrem Verlauf erfasst und durch die Ausführung der lokalen Rekonstruktionsvorschriften zuverlässig rekonstruiert werden. Diese Vorgehensweise ist für die manuelle DHM-Erfassung vor Ort gängige Praxis (siehe zum Beispiel Göbel et al. 1975).

#### Modellgesteuerte Rekonstruktion

Wurde die Abtastung einer Geländeoberfläche homogen und isotrop vorgenommen und dabei keine Rekonstruktionsvorschrift festgelegt, kann die Berücksichtigung von Orten hoher Oberflächenkrümmung durch Anwendung von Modellwissen (siehe Seite 15) erfolgen. Dazu wird das abgetastete DHM-Signal gemäß dem eingebrachten Modellwissen interpretiert. Die Interpretation identifiziert Bereiche der Geländeoberfläche,

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung

die typischerweise zu Rekonstruktionsfehlern führen. Die Rekonstruktion berücksichtigt lokal adaptiv die identifizierten Bereiche.

Die Verfahren zu dem beschriebenen Vorgehen unterscheiden sich im Wesentlichen durch das jeweils eingebrachte Modellwissen und die Art der lokal adaptiven Rekonstruktion. Als unterschiedlichste Beispiele für solcherartige Verfahren, deren Grundlagen deutlich über den in diesem Kapitel vorgestellten Rahmen hinausreichen, können wir (Blake und Zisserman 1987), (Förstner 1991) und (Kraus und Pfeifer 1998) nennen. Insbesondere gehen diese Verfahren auch auf die Behandlung von Messfehlern ein, die wir bisher in keiner Weise betrachtet haben. Wir gehen im Rahmen dieser Arbeit davon aus, dass ein geeignetes Restaurierungsverfahren auf unsere Daten angewandt wurde und die in den Daten verbleibenden Messfehler vernachlässigbar klein sind.

### 2.1.4 Modell der Erfassungsgeneralisierung

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns nicht mit den verschiedenen Methoden der Abtastung beschäftigen, sondern von dem einfachsten Fall einer repräsentativen homogenen, isotropen Abtastung ausgehen. Damit sind wir keiner Besonderheit eines bestimmten Abtastverfahrens unterworfen und können unsere weiteren Betrachtungen auf einer allgemeinen Basis durchführen.

Für die Rekonstruktion werden wir zunächst ebenfalls den einfachsten Fall einer glättenden Faltungsoperation annehmen. Wir legen damit unseren Betrachtungsschwerpunkt auf die Folgegeneralisierung. Weiterführendes Ziel wird es sein, das hier in dieser Arbeit entwickelte Modell einer geometrischen Folgegeneralisierung auf die Erfassungsgeneralisierung anzuwenden. Hierdurch würden Rekonstruktion und Generalisierung in einem einheitlichen mathematischen Rahmen behandelt, so wie Erfassungsgeneralisierung und Folgegeneralisierung in einem einheitlichen kartographischen Rahmen behandelt werden.

Unter den gerade festgelegten Rahmenbedingungen wissen wir über das DHM-Signal, dass es einen glatten Verlauf hat und die Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz abgeschnitten, beziehungsweise stark gedämpft sind. Falls eine Rekonstruktionsvorschrift angewandt wird, die zum Beispiel topologisch bedeutsame Strukturlinien als scharfe Kanten rekonstruiert, trifft die diese Aussage immer noch jeweils gebietsweise zu.



## 2.2 Beschreibung der Signaltextur

Zur Beschreibung des DHM-Signals werden wir den Ansatz eines stochastischen Modells wählen (vergleiche Seite 19). Dabei werden wir der Arbeit von Förstner (1991) folgen und uns auf die Annahme einfacher stochastischer Eigenschaften beschränken. Basierend auf diesen Annahmen definieren wir für uns den Begriff Textur und zeigen wie sich daraus Merkmale zur Beschreibung von Geländeoberflächen ableiten lassen.

Da die Ausführungen von Förstner (1991) auf Probleme aus dem Bereich der digitalen Bildverarbeitung bezogen sind, stellen wir im Folgenden seine Ergebnisse mit Bezug auf unsere Problemstellung überblicksartig zusammen.

### 2.2.1 Die Textur eines Signals

Wir nehmen an, dass das Signal  $f(x, y)$  gebietsweise durch einen schwach stationären stochastischen Prozess modelliert werden kann. In diesem Fall gilt für das Gebiet  $\Omega$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{f(x, y) | (x, y) \in \Omega\} \\ \mathbf{f} &\sim N(\mu, C), \end{aligned}$$

wobei die schwache Stationarität von  $\mathbf{f}$  fordert

$$\begin{aligned} E(\mathbf{f}) &= \mu = \text{const.} \\ C(f(x_1, y_1), f(x_1 + \tau_1, y_1 + \tau_2)) &= C(f(x_2, y_2), f(x_2 + \tau_1, y_2 + \tau_2)) \\ &\quad \forall x_{1,2}, y_{1,2}, x_{1,2} + \tau_1, y_{1,2} + \tau_2 \in \Omega. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Textur eines Gebietes  $\Omega$  als die eindeutige Zuordnung zu einem stochastischen Prozess. Die Textur wird, wenn der zugeordnete stochastische Prozess obige Eigenschaften aufweist, durch den Mittelwert  $\mu$  und die Autokovarianzfunktion  $C(\tau_1, \tau_2) = C(\boldsymbol{\tau})$  vollständig beschrieben.

### Schätzung der Texturparameter

Da von einem zu beschreibendem Geländegebiet immer nur eine Realisierung vorliegt, setzt die Schätzung des Mittelwerts und der Autokovarianzfunktion für dieses Gebiet die *Ergodizität* des beschreibenden stochastischen Prozesses voraus, die wir hier annehmen wollen. In diesem Fall können die gesuchten Unbekannten durch Mittelwerte von Stichproben geschätzt werden. Wie wir in Abschnitt 2.1.1 gesehen haben eignet sich eine

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung

Faltung mit der Gaußfunktion  $g(\mathbf{x}, \sigma^2)$  zur Mittelwertbildung. Wenn wir die Gaußfunktion zur Mittelwertbildung nutzen, müssen wir  $\sigma^2$  so wählen, dass  $\sigma > 0$  wesentlich kleiner als die Gebietsausdehnung von  $\Omega$  ist, damit der Fehler durch Beiträge aus anderen Gebieten klein ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist erhalten wir bei  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$  die lokale Schätzung

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}, \sigma^2) \\ \widehat{C}(\boldsymbol{\tau}) &= ((f(\mathbf{x}) - \hat{\mu})(f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau}) - \hat{\mu})) * g(\mathbf{x}, \sigma^2).\end{aligned}$$

Aus dieser Schätzung müssen wir nun Merkmale ableiten, die die Textur in interpretierbarer Weise beschreiben. Zwei unmittelbar interpretierbare Merkmale ergeben sich in diesem Zusammenhang sofort:

1. Der geschätzte Mittelwert  $\hat{\mu}$ .
2. Die geschätzte Varianz  $\widehat{C}(0)$ .

Mit der Ableitung weiterer Merkmale aus der Autokovarianzfunktion beschäftigen wir uns im Folgenden.

### Berechnung unabhängiger, interpretierbarer Merkmale

Die Autokovarianzfunktion  $C(\boldsymbol{\tau})$  ist symmetrisch im Ursprung und kann dort nach Taylor (vergleiche zum Beispiel do Carmo 1993) für kleine  $\boldsymbol{\tau}$  durch

$$C(\boldsymbol{\tau}) = C(0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^T \frac{d^2 C(\boldsymbol{\tau})}{d\boldsymbol{\tau}^2} \boldsymbol{\tau} + O(\boldsymbol{\tau}^4)$$

approximiert werden. Die Hessematrix  $\mathbf{H}(C(\boldsymbol{\tau}))$  kann wegen (vergleiche Papoulis 1991, Seite 313f)

$$\begin{aligned}H_{11} &\equiv \frac{d^2 C(\boldsymbol{\tau})}{d\tau_1^2} = -E \left( \left( \frac{df(\mathbf{x})}{dx} \right)^2 \right) \\ H_{12} &\equiv \frac{d^2 C(\boldsymbol{\tau})}{d\tau_1 d\tau_2} = -E \left( \left( \frac{df(\mathbf{x})}{dx} \right) \left( \frac{df(\mathbf{x})}{dy} \right) \right) \\ H_{22} &\equiv \frac{d^2 C(\boldsymbol{\tau})}{d\tau_2^2} = -E \left( \left( \frac{df(\mathbf{x})}{dy} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

## 2.2 Beschreibung der Signaltextur

durch die Erwartungswerte der Varianz beziehungsweise Kovarianz der Gradienten von  $f(\mathbf{x})$  dargestellt werden. Zur Berechnung der Gradienten können wir die Linearität der Faltungsoperation ausnutzen, denn es gilt

$$\frac{d}{dx} f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}, \sigma^2) = f(\mathbf{x}) * \frac{d}{dx} g(\mathbf{x}, \sigma^2) = f(\mathbf{x}) * g_x(\mathbf{x}, \sigma^2).$$

So können die Gradienten schon im Rahmen der Rekonstruktion berechnet werden, wenn dafür die Faltung mit der Gaußfunktion eingesetzt wird (vergleiche Abschnitt 2.1.2). Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{x})}{dx} * g(\mathbf{x}, \sigma^2) &= f(\mathbf{x}) * g_x(\mathbf{x}, \sigma^2) = f_x(\mathbf{x}, \sigma^2) \\ \frac{df(\mathbf{x})}{dy} * g(\mathbf{x}, \sigma^2) &= f(\mathbf{x}) * g_y(\mathbf{x}, \sigma^2) = f_y(\mathbf{x}, \sigma^2), \end{aligned}$$

wobei  $\sigma^2$  ein Maß für die Glattheit des rekonstruierten Signals ist. Die Varianz der Gradienten kann dann durch

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}\left(\frac{df(\mathbf{x})}{dx}\right) &= (f_x(\mathbf{x}, \sigma^2))^2 * g(\mathbf{x}, \rho^2) = -\widehat{H}_{11} \\ \widehat{\text{Cov}}\left(\frac{df(\mathbf{x})}{dx}, \frac{df(\mathbf{x})}{dy}\right) &= (f_x(\mathbf{x}, \sigma^2)) (f_y(\mathbf{x}, \sigma^2)) * g(\mathbf{x}, \rho^2) = -\widehat{H}_{12} \\ \widehat{\text{Var}}\left(\frac{df(\mathbf{x})}{dy}\right) &= (f_y(\mathbf{x}, \sigma^2))^2 * g(\mathbf{x}, \rho^2) = -\widehat{H}_{22} \end{aligned}$$

lokal geschätzt werden, wobei  $\rho^2$  ein Maß für die Größe des Gebiets ist, über das zur Schätzung der Unbekannten integriert wird.

Die so geschätzte negative Hessematrix der Autokovarianzfunktion am Ursprung

$$\begin{aligned} -\widehat{\mathbf{H}}(\widehat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\tau})) &= \begin{pmatrix} (f_x(\mathbf{x}, \sigma^2))^2 & (f_x(\mathbf{x}, \sigma^2)) (f_y(\mathbf{x}, \sigma^2)) \\ (f_x(\mathbf{x}, \sigma^2)) (f_y(\mathbf{x}, \sigma^2)) & (f_y(\mathbf{x}, \sigma^2))^2 \end{pmatrix} * g(\mathbf{x}, \rho^2) \\ &= (\nabla f(\mathbf{x}, \sigma^2) \otimes \nabla f(\mathbf{x}, \sigma^2)) * g(\mathbf{x}, \rho^2) = \mathbf{J}_1(f(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

wird *Strukturtensor* genannt und beschreibt den gemittelten quadrierten Gradienten der Funktion  $f(\mathbf{x})$ . Eine Eigenwertanalyse des positiv definiten Struktur tensors liefert drei von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Größen: zwei Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  und die Richtung des größeren Eigenwerts  $\theta$ . Nach Förstner (1991) lassen sich hieraus drei unmittelbar interpretierbare Merkmale ableiten:

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung

3. Die Spur des Strukturtenors  $\text{sp}(\mathbf{J}_1) = \lambda_1 + \lambda_2$  ist die Summe der Eigenwerte und als ein Maß der *Stärke der Textur* zu interpretieren.
4. Das Verhältnis der Eigenwerte  $\lambda_1/\lambda_2$  ist als ein Maß der *Anisotropie der Textur* zu interpretieren.
5. Die Richtung des kleinsten Eigenwerts  $\theta + 90^\circ$  ist als *lokale Richtung der Textur* zu interpretieren, wenn beide Eigenwerte nicht gleich sind.

### 2.2.2 Der krümmungsbasierte Strukturtenor

Um eine Geländeoberfläche mit den im vorigen Abschnitt entwickelten Methoden beschreiben zu können, müssen wir die angenommenen Voraussetzungen in Bezug auf Geländeoberflächen überprüfen. Wir stellen fest, dass die Annahme eines gebietsweise konstanten Erwartungswerts ( $E(f) = \text{const.}$ ) der Modellvorstellung einer gestuften Oberfläche entspricht. Diese Modellvorstellung ist für uns nicht ausreichend, da wir auch geneigtes Gelände beschreiben wollen. Wir werden daher die Gradienten von  $f(\mathbf{x})$  als zwei unabhängige schwach stationäre stochastische Prozesse

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= \{f_x(\mathbf{x}, \sigma^2) \mid \mathbf{x} \in \Omega, \sigma^2 > 0\} & \text{und} & & \mathbf{f}_y &= \{f_y(\mathbf{x}, \sigma^2) \mid \mathbf{x} \in \Omega, \sigma^2 > 0\} \\ \mathbf{f}_x &\sim N(\mu_x, C_x) & & & \mathbf{f}_y &\sim N(\mu_y, C_y) \end{aligned}$$

mit gleicher Varianz  $C_x(0) = C_y(0)$  annehmen. Die jeweils aus der schwachen Stationarität resultierende Annahme

$$\begin{aligned} E(\mathbf{f}_x) &= \mu_x = \text{const.} \\ E(\mathbf{f}_y) &= \mu_y = \text{const.} \end{aligned}$$

entspricht der Modellvorstellung einer gebietsweise konstant geneigten Geländeoberfläche und ist hierin zum Beispiel dem Ansatz von Ebner (1979) vergleichbar (siehe Seite 19).

Wir können nun, wie von Brügelmann und Förstner (1992) vorgeschlagen, zur Beschreibung von  $f(\mathbf{x})$  einen aus beiden Prozessen gemittelten Strukturtenor

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2(f(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) &= -\frac{1}{2} \left( \mathbf{H}(\widehat{C_x(\boldsymbol{\tau})}) + \mathbf{H}(\widehat{C_y(\boldsymbol{\tau})}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}_1(f_x(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) + \mathbf{J}_1(f_y(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2)) \end{aligned}$$

definieren. Mit den Abkürzungen  $f_{xx} := d^2 f(\mathbf{x}, \sigma^2) / d\mathbf{x}^2, \dots$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_2(f(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} f_{xx}^2 & f_{xx}f_{xy} \\ f_{xx}f_{xy} & f_{xy}^2 \end{pmatrix} * g(\mathbf{x}, \rho^2) + \begin{pmatrix} f_{yx}^2 & f_{yx}f_{yy} \\ f_{yx}f_{yy} & f_{yy}^2 \end{pmatrix} * g(\mathbf{x}, \rho^2) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} * g(\mathbf{x}, \rho^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{H}(f(\mathbf{x}, \sigma^2)))^2 * g(\mathbf{x}, \rho^2). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Der mittlere Strukturtenor der beiden Gradientenprozesse  $\mathbf{f}_x$  und  $\mathbf{f}_y$  beschreibt die mittlere quadrierte Krümmung der Funktion  $f(\mathbf{x})$  und wird von uns *krümmungsbasierter Strukturtenor* genannt. Eine Eigenwertanalyse liefert wiederum zwei Eigenwerte  $\delta_1, \delta_2$ , die Richtung des größten Eigenwerts  $\phi$  und die entsprechenden Merkmale:

3'. *Stärke der Gradienten-Textur*:  $\text{sp}(\mathbf{J}_2) = \delta_1 + \delta_2$

4'. *Anisotropie der Gradienten-Textur*:  $\delta_1/\delta_2$

5'. *Lokale Richtung der Gradienten-Textur*:  $\phi + 90^\circ$

### 2.2.3 Die Mittelungsparameter $\sigma^2$ und $\rho^2$

Die Bestimmung des Strukturtenors oder des krümmungsbasierten Strukturtenors beinhaltet zwei Mittelungen, die durch die Parameter  $\sigma^2$  und  $\rho^2$  gesteuert werden können.

Der erste Parameter  $\sigma^2$ , im Folgenden *Glättungsparameter* genannt, ist ein Maß für die aus der ersten Mittelung resultierende Glattheit des Eingangssignals  $f(x, y)$ . Diese Mittelung erfüllt zwei Aufgaben. Erstens kann sie die für die Bildung der Ableitungen notwendige Rekonstruktion auf numerisch stabile Art liefern und so die Berechnung der Strukturtenoren auch auf diskreten Daten ermöglichen. Eine Integration der Mittelung und der Berechnung der Ableitungen in den Rekonstruktionsprozess ist daher sinnvoll. Zweitens kann die erste Mittelung aufgrund ihrer Eigenschaften im Frequenzraum (vergleiche Abschnitt 2.1.2) hochfrequentes Rauschen unterdrücken und so einen Beitrag zur Restaurierung eines fehlerbehafteten Eingangssignals leisten.

Die Größe des Integrationsbereichs zur Schätzung der unbekannten Größen wird durch den zweiten Parameter  $\rho^2$  gesteuert, den wir im Folgenden *Integrationsparameter* nennen werden. Diese Mittelung liefert die gemittelte quadrierte Neigungsmatrix beziehungsweise Krümmungsmatrix, deren Eigenvektoren koordinatensysteminvariante Merkmale darstellen. Die Quadratur hat bei der Mittelung die Folge, dass sich Eigenvektoren

## 2 Grundlagen aus der Signalverarbeitung

mit gleicher Richtung aber umgekehrtem Vorzeichen nicht gegenseitig aufheben. So kann zum Beispiel die Ausrichtung eines kohärenten Wellenmusters (Jähne 1993) bestimmt werden, auch wenn die einzelnen Wellen eine deutlich kleinere räumliche Ausdehnung haben als der Integrationsparameter.

### 3 Skalenräume

Die geometrische Generalisierung ist ein vereinfachender Vorgang, den wir uns aus Vereinfachungsschritten zusammengesetzt denken. Die sukzessiven Vereinfachungsschritte erzeugen eine Folge von Generalisierungsstufen mit zunehmender Einfachheit. Dieses Modell entspricht einem kartographischen Generalisieren, bei dem aus einer Ausgangskarte eine Folge von Folgekarten mit abnehmendem Maßstab entsteht. Wir postulieren für die geometrische Generalisierung, dass die Vereinfachungen in viele *kleine Vereinfachungsschritte* unterteilt werden können. Die Betonung liegt dabei auf klein, das heißt, dass ein kleiner Vereinfachungsschritt nur kleine Vereinfachungen bewirkt, und dass dabei keine Sprünge auftreten.

Wir werden in diesem Kapitel definieren, was unter einem kleinen Vereinfachungsschritt genau zu verstehen ist und was dabei eine kleine Veränderung bedeutet. Hierzu werden wir zuerst das Konzept der Skalenräume einführen und Axiome vorstellen, die ihre elementaren Eigenschaften beschreiben. Anschließend werden wir unterschiedliche Realisationen von Skalenräumen vorstellen.

Der Begriff Skalenraum ist die Übersetzung des englischen Begriffs „*scale-space*“. Das Wort „*scale*“ kann mit „Skala“ oder „Maßstab“ übersetzt werden. Da in der Kartographie der Begriff Maßstab mit dem dimensionslosen Maßverhältnis von Strecken belegt ist, verwenden wir in dieser Arbeit den Begriff „Skala“ als Übersetzung von „*scale*“. Das Wort „Skala“ leitet sich vom lateinischen „*scalae*“ ab, welches Leiter, Treppe beziehungsweise Stufen bedeutet, und liefert somit eine treffende Beschreibung der Bedeutung von Skalenräumen.

Die Skalenraum-Methode wurde erstmals von Iijima (1962) als axiomatische Ableitung vorgestellt und durch die Arbeiten von Witkin (1983) und Koenderink (1984) in den Bereich der digitalen Bildverarbeitung eingeführt. Eine Reihe von Veröffentlichungen dokumentiert die mit dieser Methode erzielten Ergebnisse in unterschiedlichen Anwendungsbereichen der digitalen Bildverarbeitung. Als Beispiele seien hier (Lindeberg 1994), (ter Haar Romeny 1994), (Sporring et al. 1997), (ter Haar Romeny et al. 1997), (Nielsen et al. 1999) und insbesondere (Weickert 1998) zur Lektüre empfohlen.

## 3.1 Skalenraum-Axiome

In diesem Abschnitt werden wir grundlegende Eigenschaften von Skalenräumen betrachten. Dazu folgen wir der Arbeit von Alvarez et al. (1993), die wesentliche Skalenraum-Eigenschaften durch Axiome einzeln beschrieben haben. Eine Betrachtung der Axiome ermöglicht es uns, eine Verknüpfung von erwarteten Eigenschaften einer geometrischen Generalisierung zu dem Skalenraum-Formalismus zu ziehen.

Wir betrachten eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  und führen eine Familie von Transformationsoperatoren  $(T_t)_{t \geq 0}$  ein, die eine Folge von Abbildungen

$$u(\mathbf{x}, t) = (T_t f)(\mathbf{x})$$

erzeugt, wobei  $t$  der so genannte *Skalenparameter* ist. Wenn  $f$  (im Falle von  $N = 2$ ) ein DHM repräsentiert und  $T_t$  eine geometrische Generalisierungsvorschrift, dann ist  $t$  ein Maß für den *Unterschied* zwischen den Skalen des generalisierten DHM  $u(\mathbf{x}, t)$  und des DHM  $f$ .

Wir werden in dem Rest dieses Kapitels der Einfachheit halber das Attribut „geometrisch“ in Verbindung mit Generalisierung weglassen. Inhaltlich ist in diesem Kapitel immer die geometrische Generalisierung gemeint. Die hier entwickelten Gedankengänge sind zunächst nicht für die Anwendung auf eine begriffliche Generalisierung gedacht.

### 3.1.1 Architektur-Axiome

Die Architektur-Axiome beschreiben den Aufbau von Skalenräumen. Wir beginnen mit einem Axiom, dass unsere Forderung nach kleinen Vereinfachungsschritten formuliert.

**Axiom 3.1** *Ein Skalenraum wird **rekursiv** genannt, falls*

$$\begin{aligned} T_h \circ T_t(f) &= T_{t+h}(f) \\ T_0(f) &= f \end{aligned}$$

*auf  $\mathbb{R}^N$ , für alle  $h, t \geq 0$  und  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ .*

Ist dieses Axiom erfüllt, kann ein Operator  $T_t$  diskretisiert werden und durch  $n$ -fache Iteration des Operators  $T_{t/n}$  dargestellt werden. Wenn der Operator  $T_t$  eine Generalisierungsoperation repräsentiert, die einen dem Skalenparameter  $t$  entsprechenden Skalenübergang bewirkt, dann ist die  $n$ -fache Iteration des Operators  $T_{t/n}$  als  $n$ -fache Ausführ-



### 3.1 Skalenraum-Axiome

ung eines kleinen Generalisierungsschritts zu interpretieren. Axiom 3.1 fordert weiterhin, dass die kleinen Generalisierungsschritte gleich und von der Größe des Skalenübergangs, die durch den Skalenparameter  $t$  beschrieben wird, unabhängig sind.

Wenn wir die Skala von DHM  $f$  kennen, wovon wir ausgehen werden, können wir über den Skalenparameter  $t$  auf die Skala von  $u(\cdot, t) = T_t(f)$  schließen. Es kann dann sinnvoll sein, die Generalisierungsschritte über den Skalenparameter  $t$  an die DHM-Skala zu koppeln, was Axiom 3.1 widerspricht. Wir benötigen dann eine schwächere Formulierung dieses Axioms, die wir erhalten, wenn wir eine Familie von Übergangsoperatoren  $(T_{t_1, t_2})_{0 \leq t_1, t_2 < \infty}$  einführen, die jeweils einen Übergang vom Skalenparameter  $t_2$  zum Skalenparameter  $t_1$  bezeichnen.

**Axiom 3.2** Ein Skalenraum wird *pyramidal* genannt, falls

$$T_{t+h} = T_{t+h, t} \circ T_t$$

für alle  $0 \leq h, t < \infty$ .

Dieses Axiom ist eine Abschwächung von Axiom 3.1, da jeder rekursive Skalenraum auch pyramidal ist. Eine Diskretisierung eines pyramidalen Skalenraumoperators  $T_{t+h}$  führt auf eine Serie von unterschiedlichen Operatoren  $S_n = T_{(n+1)h, nh}$  die sukzessive ausgeführt werden. Dies entspricht wieder einer Unterteilung einer Generalisierungsoperation in kleine Generalisierungsschritte, für die, im Gegensatz zu Axiom 3.1, nicht Gleichheit gefordert wird.

Bis jetzt haben wir eine Unterteilung der Generalisierungsoperation in kleine Generalisierungsschritte betrachtet. Wir fordern nun, dass die Schrittweite dieser kleinen Generalisierungsschritte keinen Einfluss auf die gesamte Generalisierungsoperation hat. Für einen entsprechenden Skalenraum heißt das, dass die Diskretisierung von der Schrittweite unabhängig zu sein hat, was durch die Existenz des folgenden Grenzwerts erreicht wird.

**Axiom 3.3** Der Grenzwert

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T_{t+h, t} f - f}{h} = A_t(f)$$

existiert für  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Der zugehörige Operator  $A_t(f)$  wird *Infinitesimaler Generator* genannt.

Der Infinitesimale Generator gibt auf jeder Skala die Richtung der Generalisierung vor. Er bestimmt, wo Vereinfachungen vorgenommen werden oder wo Strukturen betont

### 3 Skalenräume

werden und legt damit die Eigenschaften eines Skalenraums fest. Beim Design eines Skalenraumes ist der Infinitesimale Generator daher der Ansatzpunkt, um dem zu gestaltenden Skalenraum die gewünschten Eigenschaften zu verleihen.

Die Existenz eines Infinitesimalen Generators setzt eine starke Kontinuitätsbedingung an die Skalenraumoperatoren  $T_t$ . Diese Kontinuitätsbedingung kann in erweiterter Form durch folgendes Axiom ausgedrückt werden.

**Axiom 3.4** Ein Skalenraum ist *regulär*, wenn

$$\|T_{t+h,t}(f + ag) - (T_{t+h,t}(f) + ag)\|_\infty \leq Cah$$

für alle  $a, h \in [0, 1]$  und  $f, g$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , wobei  $C$  eine Konstante, die nur von der Wahl von  $f$  und  $g$  abhängt.

Falls  $T_t$  ein linearer Operator ist, reduziert sich die Forderung aus Axiom 3.4 auf die einfache Form

$$\|T_t(f) - f\|_\infty \leq Ct,$$

das heißt, dass die durch den Skalenraumoperator  $T_t$  bewirkte Änderung beschränkt ist. Insbesondere ist bei  $t = 0$  ein stetiges Verhalten gefordert, was den Bezug zur Existenzforderung eines Infinitesimalen Generators verdeutlicht.

Der Nutzen von Axiom 3.4 ist nun, dass im Wesentlichen aus ihm folgt, dass ein Skalenraum als Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_t(u) \tag{3.1}$$

formuliert werden kann (zum Beweis siehe zum Beispiel Lindeberg 1997, Beweis von Lemma 6.3.3). Zur Lösung dieses instationären Diffusionsproblems kann nach einer Zeitdiskretisierung auf die Methode der Finiten Elemente zurückgegriffen werden. Eine praktische Umsetzung der Berechnung eines Skalenraums kann damit auf Basis von etablierten Standardverfahren erfolgen (siehe zum Beispiel Zienkiewicz 1984, Schwarz 1991, Braess 1992 und Johnson 1987; vergleiche auch Kapitel 5).

Zusammenfassend können wir feststellen, dass eine geometrische Generalisierung, die den Forderungen

1. Eine geometrische Generalisierung besteht aus Vereinfachungsschritten (Axiom 3.1 beziehungsweise Axiom 3.2).
2. Die Vereinfachungsschritte können beliebig klein unterteilt werden (Axiom 3.3).

3. Die durch einen kleinen Vereinfachungsschritt bewirkten Veränderungen sind klein (Axiom 3.4).

gehört, durch einen Skalenraum dargestellt und durch eine Differentialgleichung (3.1) repräsentiert werden kann.

#### 3.1.2 Stabilitäts-Axiom

Da eine Generalisierung eine Vereinfachung darstellt, fordern wir von einem entsprechenden Skalenraum ein im Wesentlichen glättendes Verhalten. Dies wird durch folgendes Axiom erreicht.

**Axiom 3.5** *Ein Skalenraum gehorcht dem Extremums-Prinzip, falls*

$$\inf_{\mathbb{R}^N}(f) \leq T_t(f) \leq \sup_{\mathbb{R}^N}(f)$$

*auf  $\mathbb{R}^N$  für alle  $t \geq 0$  und  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ .*

Das Extremums-Prinzip garantiert die Stabilität eines Skalenraums in dem Sinne, dass Maxima und Minima einer Lösung nicht verstärkt werden und eine Lösung daher nicht divergiert. Für ein entsprechendes Generalisierungsverfahren bedeutet dies, dass beim elementaren Vorgang der Betonung nur Kontrastverschärfung oder Verbreiterung vorkommen. Eine Überhöhung würde dem Extremums-Prinzip widersprechen.

In der digitalen Bildverarbeitung kommt dem Extremums-Prinzip besondere Bedeutung zu. Wenn ein digitales Bild mit diskretem Grauwertebereich  $[0, 256]$  einer Skalenraumtransformation unterzogen wird, garantiert das Extremums-Prinzip, dass die Lösung im gleichen Werteintervall liegt. Weiterhin konnte Hummel (1986) zeigen, dass das Extremums-Prinzip, unter bestimmten weiteren Voraussetzungen, die Erfüllung wichtiger Forderungen von Koenderinks Kausalitäts-Prinzip (mit zunehmendem Skalenparameter entstehen keine neuen Strukturen (Koenderink 1984)) garantiert. Siehe hierzu auch die Arbeiten von Witkin (1983), Babaud et al. (1986), Koenderink und van Doorn (1986), Yuille (1988), Perona und Malik (1990) und Lindeberg (1991).

#### 3.1.3 Morphologie-Axiome

Die Morphologie-Axiome beschreiben Invarianzen von Skalenräumen. Die Invarianz gegenüber der Wahl des Koordinatensystems wird wie folgt formuliert.

### 3 Skalenräume

**Axiom 3.6** Ein Skalenraum ist *verschiebungsinvariant*, falls

$$\begin{aligned} T_t(0) &= 0 \\ T_t(f + C) &= T_t(f) + C \end{aligned}$$

auf  $\mathbb{R}^N$  für alle  $t \geq 0$ ,  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  und  $C \in \mathbb{R}$ .

**Axiom 3.7** Ein Skalenraum ist *translationsinvariant*, falls

$$T_t(\tau_h \cdot f) = \tau_h \cdot (T_t f)$$

für alle  $h$  in  $\mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ ,  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , wobei  $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$ .

**Axiom 3.8** Ein Skalenraum ist *isometrieinvariant*, falls

$$T_t(R \cdot f) = R \cdot T_t(f)$$

für alle  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $t \geq 0$  und für alle Transformationen  $R$ , definiert durch  $(R \cdot f)(x) = f(Rx)$ , wobei  $R$  eine orthogonale Transformation des  $\mathbb{R}^N$  ist.

Eine Unabhängigkeit von der absoluten räumlichen Ausdehnung von Strukturen erhalten wir durch das letzte Axiom dieses Kapitels.

**Axiom 3.9** Ein Skalenraum ist *skaleninvariant*, falls für beliebige  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$ , ein  $t' \geq 0$  existiert, so dass

$$D_\lambda T_{t'} = T_t D_\lambda$$

wobei  $D_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ .

Damit verhält sich ein Skalenraum auf jeder Skala gleich, wenn die relativen Größenverhältnisse gleich sind.

## 3.2 Der Gaußsche Skalenraum

Als Beispiel für einen Skalenraum im Zweidimensionalen, der alle Axiome des vorhergehenden Abschnitts erfüllt, ist der Gaußsche Skalenraum zu nennen. Unter der *Annahme von Linearität* haben Babaud et al. (1986) gezeigt, dass der Gaußsche Skalenraum als einziger alle genannten Axiome erfüllt. Er wird durch den Infinitesimalen Generator

$$A(f) = \Delta f$$

repräsentiert und führt auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \Delta u(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.2}$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Der Zeitparameter  $t$  wird auch Diffusionsparameter genannt. Die Lösung der Gleichung lässt sich für einen festen Zeitpunkt  $t_{\text{stop}} > 0$  direkt durch die lineare Faltung

$$u(\mathbf{x}, t_{\text{stop}}) = f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}, t_{\text{stop}})$$

ermitteln, wobei

$$g(\mathbf{x}, t_{\text{stop}}) = \frac{1}{4\pi t_{\text{stop}}} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{4t_{\text{stop}}}}$$

die bekannte Gaußfunktion mit Varianz  $\sigma^2 = 2t_{\text{stop}}$  ist (vergleiche Gleichung (2.3) auf Seite 27). Der Übergangsoperator des Gaußschen Skalenraumes ist so mit der Faltung mit der Gaußfunktion<sup>1</sup>

$$T_t(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}, t)$$

zu identifizieren, womit auch die Namensgebung des Gaußschen Skalenraums erklärt sei.

## 3.3 Nichtlineare Skalenraum-Modelle

Physikalisch beschreibt Gleichung (3.2) die Wärmeleitung (oder allgemein eine Diffusion) in einem homogenen und isotropen Medium. Ist das Medium nicht homogen und isotrop, dann muss an Stelle von Gleichung (3.2) die allgemeinere Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u)\tag{3.3}$$

zur Beschreibung genutzt werden. Hierbei ist  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  der sogenannte Diffusionstensor, der Inhomogenität und Anisotropie des Diffusionsmediums beschreibt. Eine Inhomogenität drückt sich durch eine Ortsabhängigkeit und eine Anisotropie durch einen Unterschied der beiden Eigenwerte von  $\mathbf{D}$  aus.

Es liegt nun nahe, Gleichung (3.3) zur Anpassung des Gaußschen Skalenraums an spezifische Probleme zu nutzen. Im Folgenden werden wir zwei Modelle vorstellen, deren konzeptionelle Grundgedanken wir im nächsten Kapitel nutzen werden.

---

<sup>1</sup>Eine Implementation einer effizienten, in der Laufzeit von der Skala unabhängigen Approximation dieser Rechenoperation hat Deriche (1993) vorgestellt.

#### 3.3.1 Das Perona-Malik Modell

Zur Detektion von Kanten in digitalen Grauwertbildern haben Perona und Malik (1987) ein Skalenraum-Modell vorgestellt. Dieses Modell beruht auf der Modellvorstellung, dass ein digitales Grauwertbild aus homogenen Grauwertregionen besteht, die sich durch Kantenbereiche voneinander abgrenzen und von einem Bildrauschen überlagert werden. Um das Rauschen in den homogenen Grauwertregionen zu eliminieren und gleichzeitig die Kanten zu erhalten, argumentieren Perona und Malik, dass nur innerhalb der homogenen Grauwertregionen geglättet werden sollte und die Kantenbereiche hiervon ausgenommen werden sollten.

Hierzu identifizieren sie die Kantenbereiche über den Grauwertgradienten  $\nabla u$  und setzen den Diffusionstensor als

$$\mathbf{D} = w(\nabla u) \mathbf{I}$$

an. Die skalare Diffusivität  $w(\nabla u)$  ist dabei eine nichtnegative monoton fallende Funktion mit  $w(0) = 1$ , wie beispielsweise

$$w(\nabla u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{K}\right)^2}.$$

Mit dieser Wahl erreichen sie, dass die Diffusion, wie verlangt, an Grauwertkanten mit  $|\nabla u|^2 > K^2$  nahezu ausgesetzt wird, während in den verrauschten homogenen Grauwertregionen, wie im Falle des Gaußschen Skalenraumes, geglättet wird. Experimentell ist festzustellen, dass Grauwertkanten mit dieser Methode zuverlässig erhalten werden können (Perona und Malik 1990).

Der skalare Ansatz des Diffusionstensors in Abhängigkeit des lokalen Gradienten führt zu einer isotropen, inhomogenen Diffusionsgleichung. Die Anwendung auf digitale Bilder mit jeweils lokal anisotroper Verteilung der Grauwertgradienten führt zu einer lokal anisotropen Veränderung der Grauwerte durch den Diffusionsvorgang, weshalb Perona und Malik ihr Verfahren „Anisotrope Diffusion“ nennen.

#### 3.3.2 Kanten und Kohärenz verstärkende anisotrope Diffusion

Weickert (1994) hat sich auf allgemeine Weise mit den Skalenraumeigenschaften von Diffusionsgleichungen mit einem Diffusionstensor  $\mathbf{D}$  beschäftigt. Er konnte zeigen, dass für einen glatten, positiv definiten, symmetrischen Diffusionstensor mit beschränkten Eigenwerten eine eindeutige, reguläre Lösung der Differentialgleichung (3.3) existiert.

Als Beispiel hierzu (Weickert 1998) wählt er den Diffusionstensor  $\mathbf{D}$  in Abhängigkeit

vom Strukturtensor  $\mathbf{J}_1$  (siehe Gleichung (2.6))

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}(\phi) \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\phi),$$

wobei  $\mathbf{R} \in \text{SO}(2)$  eine Rotationsmatrix ist und  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\phi$  Eigenwerte und Hauptrichtung von  $\mathbf{J}_1$  sind. Durch diese Wahl haben die Eigenvektoren des Diffusionstensors die gleiche Richtung, wie die Eigenvektoren des Strukturensors, das heißt, dass mit geeigneter Wahl von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Diffusion lokal an die Richtung der Textur angepasst werden kann.

- Mit der Wahl

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \begin{cases} 1 & (\lambda_1 \leq 0) \\ 1 - \exp\left(\frac{-C_m}{(\lambda_1/K)^m}\right) & (\lambda_1 > 0) \end{cases} \\ \gamma_2 &:= 1, \end{aligned}$$

wobei  $m$  und  $C_m$  geeignet (Weickert 1998, Seite 114 und Perona und Malik 1990, Seite 632) zu wählende Konstanten sind, wird erreicht, dass die Diffusion in Richtung des lokal größten Gradienten abgeschwächt und für  $\lambda_1 > K$  nahezu ausgesetzt wird. Wie im Falle des Perona-Malik Modells wird damit eine *Kanten verstärkende Diffusion* beschrieben. Eine Diffusion im Perona-Malik Modell setzt die Diffusion in Kantenbereichen aus und erhält damit auch das Rauschen in diesen Bereichen. Die von Weickert beschriebene Diffusionsgleichung diffundiert jedoch in Richtung der Kanten und glättet somit Rauschen auch in Kantenbereichen weg.

- Eine andere Wahl für die Eigenwerte des Diffusionstensors ist

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \alpha \\ \gamma_2 &:= \begin{cases} \alpha & (\lambda_1 = \lambda_2) \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{-C}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{2m}}\right) & (\text{sonst}) \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha \in (0, 1)$  ein kleiner Regularisierungsparameter und  $m$  und  $C$  geeignet zu wählende Konstanten sind. In diesem Modell wird die Anisotropie der lokalen Textur verstärkt, indem nur in Richtung des lokal schwächsten Gradienten, der sogenannten Kohärenzrichtung, geglättet wird, wenn  $\alpha$  genügend klein gewählt wurde. Weickert (1998) nennt dies *Kohärenz verstärkende Diffusion*. Am Beispiel von einem digitalisierten Fingerabdruck und Malereien von van Gogh illustriert er, wie mit diesem Modell linienartige Strukturen verstärkt werden können.

### 3 Skalenräume

In beiden Beispielen ist der Diffusionstensor nach Konstruktion positiv definit, hat einen glatten Verlauf und beschränkte Eigenwerte. Damit haben beide Modelle eine reguläre Lösung. Weiterhin konnte Weickert (1994) für beide Modelle die Erfüllung der in diesem Kapitel vorgestellten Skalenraum-Axiome, bis auf die Skaleninvarianz, zeigen und für den Fall Neumannscher Randbedingungen die Erhaltung des Mittelwerts beweisen.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Skalenräume sind für uns ein Werkzeug, mit dem wir, unter Erfüllung der in diesem Kapitel beschriebenen Stabilitäts- und Invarianzeigenschaften, digital repräsentierte Oberflächen glätten können. Diese Glättung können wir mit den vorgestellten Techniken lokal adaptiv steuern, wobei wir nicht nur die Stärke der Glättung lokal variieren können, sondern auch deren Richtung. Dies ist insbesondere bei der Generalisierung von linienartigen Strukturen notwendig (siehe Kapitel 4).



## 4 Geometrische Generalisierung

Bis hierher haben wir die mathematischen und methodischen Grundlagen vorgestellt, die wir im Folgenden benötigen. Wir werden in diesem Kapitel die geometrische Generalisierung von DHM als Skalenraum formulieren, das heißt, eine Diffusionsgleichung aufstellen und diese lokal adaptiv durch die Werte des krümmungsbasierten Struktur-tensors steuern. Wie beschrieben, bedeutet dies eine Zerlegung der geometrischen Generalisierung in unendlich kleine Einzelschritte. Wie ist das anschaulich zu verstehen?

Stellen wir uns vor, wir hätten von einer Geländeoberfläche ein verkleinertes, detailgetreues Abbild aus Ton (vorzugsweise aus dem Ton, den auch Töpfer verwenden) erstellt und wollen dieses Ton-Höhenmodell manuell generalisieren. Dazu müssen wir uns überlegen, wie und mit welchem Druck wir mit unseren angefeuchteten Fingern über die Tonoberfläche streichen müssen, um bedeutsame Strukturen zu vereinfachen und gegebenenfalls zu betonen. Die vielen durchzuführenden Striche mit unseren angefeuchteten Fingern entsprechen einer geometrischen Generalisierung in vielen kleinen Einzelschritten, wie wir sie nun für Digitale Höhenmodelle ausarbeiten werden.

### 4.1 Ziele einer geometrischen Generalisierung

Ein erster Ansatz zur geometrischen Generalisierung sollte zunächst auf einem möglichst wenig differenzierten, geometrisch orientierten Oberflächenmodell basieren. Wir stellen uns daher eine Geländefläche zusammengesetzt aus

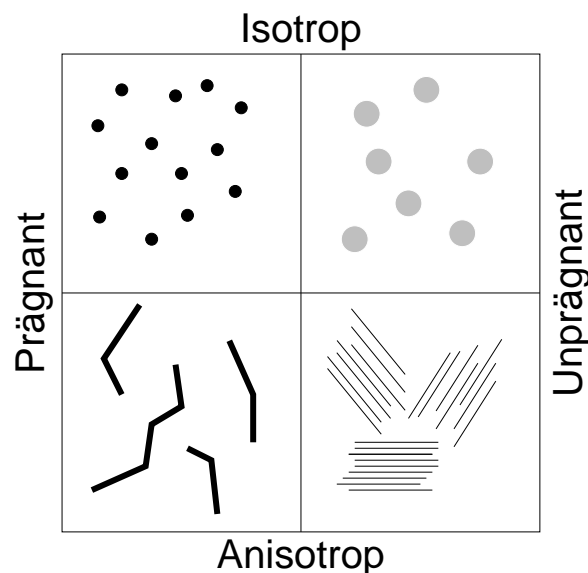
1. punktartigen
2. linienartigen
3. flächenartigen

#### 4 Geometrische Generalisierung

Geländestrukturen vor. Die Differenzierung zwischen den Geländestrukturen erfolgt über den Formcharakter, der sich aus dem Krümmungsverhalten der Geländeoberfläche ergibt. Dies ist eine Differenzierung, die sich allgemein auf Geländeflächen anwenden lässt. Es wird im Rahmen dieser Arbeit zu untersuchen sein, wie weit dieser minimalistische Ansatz trägt.

Da ein auf dem Krümmungsverhalten gründender Formcharakter auf einer Geländefläche nicht nur diskrete Werte annimmt, sondern ein Kontinuum von Werten abdeckt, ist eine scharfe Abgrenzung von Geländestrukturen ohne weiter gehende Annahmen nicht möglich. Die Strukturen einer Geländeoberfläche ordnen sich zwischen Reinformen der verschiedenartigen Strukturen ein, die wir im Folgenden beschreiben wollen.

Vorab definieren wir den *Generalisierungskontext* als eine Umgebung eines Geländepunktes, deren räumliche Ausdehnung größer als die gewählte Skala festzulegen ist.



**Abbildung 4.1:** Reinformen punkt-, linien- oder flächenartiger Geländestrukturen. Punktartige Geländestrukturen sind prägnant und isotrop. Linienartige Geländestrukturen sind prägnant und anisotrop. Flächenartige Geländestrukturen sind unprägnant und entweder isotrop oder anisotrop.

**Punktartige Geländestrukturen** Punktartige Geländestrukturen drücken sich in einem DHM durch einen *isotropen* (*ungerichteten*), *prägnanten* (*deutlich ausgeprägten*) *Formcharakter* aus. Wir erwarten an einem solchen Punkt der Geländeoberfläche eine lokal relativ starke Krümmung, die keine Vorzugsrichtung aufweist. Die absolute Stärke der Krümmung bestimmt sich aus der räumlichen Umgebung des betrachteten Geländepunktes, die der gewählten Skala entspricht. Die relative Stärke

#### 4.1 Ziele einer geometrischen Generalisierung

der Krümmung, die die Aussage ermöglicht, ob die Krümmung lokal relativ stark oder schwach ist, bestimmt sich aus dem Verhältnis der Stärke der Krümmung an dem betrachteten Geländepunkt zu der Stärke der Krümmung im Generalisierungskontext.

Die geometrische Generalisierung hat den isotropen, prägnanten Formcharakter der punktierten Geländestruktur so lange zu erhalten, bis sie in einer anderen größerskaligen Geländestruktur, die punkt-, linien- oder flächenartig ist, aufgeht, also entfernt wird.

**Linienartige Geländestrukturen** Linienartige Geländestrukturen drücken sich in einem DHM durch einen *anisotropen (gerichteten), prägnanten Formcharakter* aus. Am betrachteten Geländepunkt erwarten wir in Linienrichtung eine schwache Krümmung und orthogonal hierzu eine starke Krümmung. Die relative Aussage leitet sich aus dem Vergleich der absoluten Stärken der Krümmungen in beiden orthogonalen Richtungen ab. Im Generalisierungskontext ist die Krümmung in orthogonaler Linienrichtung relativ stark.

Die geometrische Generalisierung hat den anisotropen Formcharakter einer linienartigen Geländestruktur zu erhalten, bis sie in einer anderen größerskaligen Geländestruktur aufgeht. Undulationen des Linienverlaufs sind dabei so abzuschwächen, dass Variationen des Linienverlaufs, die kleiner als die gewählte Skala sind, verschwinden. Auf die Anisotropie des Formcharakters hat dies keinen Einfluss zu nehmen.

**Flächenartige Geländestrukturen** Flächenartige Geländestrukturen drücken sich in einem DHM durch einen homogen *unprägnanten Formcharakter* aus, der entweder homogen isotrop oder homogen anisotrop ist. Am betrachteten Geländepunkt erwarten wir eine im Generalisierungskontext relativ schwache Krümmung, beziehungsweise eine durchschnittliche Krümmung, falls die flächenartige Struktur sehr groß ist.

Die geometrische Generalisierung hat den homogenen Formcharakter einer flächenartigen Geländestruktur zu erhalten, bis sie in einer anderen größerskaligen Geländestruktur aufgeht. Störungen der Homogenität, die kleiner als die gewählte Skala sind, sind zu entfernen. Eine eventuell vorhandene Anisotropie ist zu erhalten.

Die beschriebenen Reinformen der Geländestrukturen geben uns Anhaltspunkte, für welche Beschreibungsgrößen wir Steuerparameter benötigen, um unser Generalisierungsverfahren an unterschiedliche Anwendungskontexte zu adaptieren. Als Beschrei-

## 4 Geometrische Generalisierung

bungsgrößen treten hervor: die räumliche Skala und der Generalisierungskontext, sowie die Prägnanz bzw. „Unprägnanz“ und die Anisotropie bzw. Isotropie des Formcharakters. Wir werden daher zur Adaption unseres Generalisierungsverfahrens an unterschiedliche Anforderungen vier Steuerungsparameter verwenden:

1. In erster Linie ist ein Parameter notwendig, der den Grad der angestrebten Generalisierung beschreibt. Aus der räumlichen Skala, auf der das DHM die Geländeoberfläche repräsentiert, und dem Grad der Generalisierung ergibt sich die räumliche Skala nach der Generalisierung.
2. Mit einem weiteren Parameter muss die räumliche Ausdehnung des Generalisierungskontextes festgelegt werden. Da der Generalisierungskontext in direkter Relation zur gewählten räumlichen Skala steht, ist dieser Parameter in Form eines multiplikativen Faktors anzugeben, um den der Generalisierungskontext die gewählte Skala in der räumlichen Ausdehnung übertrifft.
3. Ein Parameter legt denjenigen Einfluss fest, den Prägnanz oder „Unprägnanz“ (Homogenität) des Formcharakters auf den Verlauf der geometrischen Generalisierung nehmen.
4. Ein Parameter legt denjenigen Einfluss fest, den Isotropie oder Anisotropie des Formcharakters auf den Verlauf der geometrischen Generalisierung nehmen.

Der Einfluss der Prägnanz ist für punkt- und flächenartige Geländestrukturen und der Einfluss der Anisotropie ist für linienartige Geländestrukturen dominierend. So kann über die beiden letzteren Parameter bis zu einem gewissen Grad getrennt festgelegt werden, wie einerseits punkt- und flächen- oder andererseits linienartige Geländestrukturen bei der Generalisierung berücksichtigt werden.

### 4.2 Beschreibung des Formcharakters

Den Formcharakter haben wir bis jetzt abstrakt durch sein Krümmungsverhalten beschrieben. Wenn wir – mathematisch betrachtet – unendliche Krümmungen nicht zulassen, definieren wir damit die Geländefläche in unserem Modell implizit als kontinuierliche, glatte Oberfläche, das heißt im Sinne der Differentialgeometrie (siehe zum Beispiel do Carmo 1993) als reguläre Fläche. Einerseits lassen sich linien- oder punktartige Geländestrukturen, die Knicke enthalten, nicht durch eine reguläre Fläche repräsentieren. Andererseits vereinfacht sich die Berechnung von quantitativen Maßen, die den

Formcharakter beschreiben, da die Oberflächenkrümmung auf einer regulären Fläche eindeutig bestimmt und direkt berechenbar ist.

Nehmen wir weitergehend an, dass die Geländefläche durch eine reguläre Graphenfläche repräsentiert werden kann. Damit schließen wir senkrechte oder überhängende Geländeflächen aus, können aber – technisch gesehen – die Geländeoberfläche einfacher repräsentieren und die Oberflächenkrümmung durch die zweite Ableitung der Graphenfunktion approximieren.

Die Repräsentation einer Geländeoberfläche durch eine reguläre Graphenfläche ist eine Vereinfachung, die offensichtlich die Auswahl der repräsentierbaren Geländeoberflächen einschränkt. Ausschlaggebend für die Bewertung dieser Vereinfachung ist, ob in dem durch den Anwender vorgegebenen Anwendungskontext ein auf der Annahme einer Graphenfläche beruhendes Verfahren geeignet ist, zufrieden stellende Ergebnisse zu produzieren, wodurch sich diese durch das Occamsche Prinzip rechtfertigen würde. Wir werden zunächst Geländeoberflächen durch Graphenflächen repräsentieren, wissend, dass diese Annahme in einer anwendungsorientierten Evaluation des Verfahrens kritisch beurteilt werden muss.

### 4.2.1 Grundlage der Beschreibung

Mit der in Kapitel 4.1 festgelegten Zielsetzung wird klar, welche Aspekte des Formcharakters von besonderer Bedeutung und somit durch Maße zu quantifizieren sind. Wir benötigen ein Maß welches die Prägnanz und eines welches den Grad der Anisotropie beschreibt. Beide Maße sollen an jedem Punkt den jeweiligen Aspekt des kontinuierlichen Formcharakters in Bezug auf seine Umgebung einzeln charakterisieren.

Wir werden beide Maße auf Basis des *krümmungsbasierten Strukturensors*

$$\mathbf{J}_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}(u(\mathbf{x}, \sigma^2)))^2 * g(\mathbf{x}, \rho^2)$$

definieren. Diese positiv definite Matrix beschreibt die gemittelte quadratische Krümmung einer Graphenfunktion  $u(\mathbf{x}, \sigma^2)$  in Abhängigkeit vom Ort (vergleiche Kapitel 2.2.2). Das Quadrieren bewirkt eine Unabhängigkeit vom Vorzeichen der Krümmung, das zur Beurteilung der Prägnanz und Anisotropie nicht benötigt wird. Die Mittelung bezieht die Aussagekraft des Strukturensors auf eine bestimmte räumliche Umgebung. Wenn die Skala einer Beschreibung durch eine Basislänge von  $2\rho$  festgelegt ist, dann beschreibt  $\mathbf{J}_2$  den Formcharakter der Graphenfunktion  $u(\mathbf{x}, \sigma^2)$  auf dieser Skala, die wir im Folgenden durch  $\rho$  bezeichnen werden.

## 4.2.2 Beschreibung der Prägnanz

Die Stärke der Krümmung an einem festen Ort  $\mathbf{x}$  auf einer bestimmten Skala  $\rho$  lässt sich durch die Spur des krümmungsbasierten Strukturtenors beschreiben. Die Spur ist die Summe der auf der Skala  $\rho$  gemittelten quadrierten Hauptkrümmungen und invariant unter Drehung und Translation des Koordinatensystems.

Eine Aussage über die Prägnanz eines Geländepunkts lässt sich nicht allein aus der Stärke der Krümmung ableiten. Dazu ist ein Vergleich mit einer Referenz notwendig, die das durchschnittliche Maß von Krümmung im Generalisierungskontext benennt. Diese Referenz erhalten wir, wenn wir in einer lokalen Umgebung, die dem Generalisierungskontext entspricht, einen repräsentativen Wert der Spur des krümmungsbasierten Strukturtenors ermitteln.

Der Median ist eine Möglichkeit einen repräsentativen Wert zu bestimmen. Eine andere Möglichkeit wäre das Gaußsche Mittel, das im Zusammenhang mit Diffusionsmethoden naheliegender wäre, aber nicht die Robustheitseigenschaft des Median aufweist. Da gerade prägnante Strukturen sich im Krümmungsbild wie Ausreißer verhalten, ziehen wir zunächst den Median aufgrund seines robusten Verhaltens vor.

Bei der Definition eines Ausdrucks für die Prägnanz müssen wir beachten, dass dieser gut interpretierbar sein muss. Daher ist es sinnvoll, dass der Ausdruck der Prägnanz einen beschränkten Wertebereich aufweist, dessen obere und untere Schranke den Bedeutungen „sehr prägnant“ und „sehr unprägnant“ zugeordnet werden können. Die Kenntnis der Extremalwerte der Prägnanz hat zudem den Vorteil, das Extremalverhalten der Diffusionsgleichung exakt abschätzen zu können.

Der Wertebereich der Prägnanz ist auf das Intervall  $[0, 2]$  beschränkt, wenn wir die Prägnanz durch den Ausdruck

$$P(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2, k) = \left( \frac{2 \operatorname{sp}(J_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2))}{\operatorname{sp}(J_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2)) + \operatorname{med}(\operatorname{sp}(J_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2)), k\rho)} \right)^{n(k)} \quad (4.1)$$

darstellen, wobei  $k > 0$  der *Kontextparameter* ist, der die räumliche Ausdehnung des Generalisierungskontextes festlegt,  $\operatorname{med}(f, r)$  den Median einer Funktion  $f$  mit Filterradius  $r$  (in obigem Ausdruck gilt  $r = k\rho$ ) und  $n(k)$  eine noch zu erläuternde Korrekturfunktion bezeichnet. Die Korrekturfunktion  $n(k)$ , auf die wir im noch Folgenden genau eingehen werden, wird benötigt, damit der Wertebereich  $[0, 2]$  unabhängig von  $k$  prinzipiell vollständig ausgeschöpft werden kann.

Punkte mit durchschnittlicher (bezüglich Median) Krümmung erhalten eine Prägnanz von  $P = 1$ . Der Prägnanz-Wertebereich von Orten über- und unterdurchschnittlicher

Krümmung hat daher gleichen Umfang. Eine Prägnanz von  $P \approx 0$  kennzeichnet einen Geländepunkt, der im Vergleich zum Generalisierungskontext besonders wenig Krümmung aufweist, also im lokalen Vergleich glatt ist. Eine Prägnanz von  $P \approx 2$  hingegen kennzeichnet einen Geländepunkt, der im lokalen Vergleich besonders viel Krümmung aufweist, wo also eine scharfe Krümmungsstruktur zu erwarten ist.

Beide Fälle sind unabhängig von der aktuellen Stärke der lokalen Krümmung. Die Relation zum Generalisierungskontext ist entscheidend. Es wird damit die Schärfe, also die räumliche Begrenzung der Krümmungsstruktur bewertet, womit sich die Benennung obigen Ausdrucks mit „Prägnanz“ rechtfertigt.

### Herleitung der Korrekturfunktion

Zur Herleitung der Korrekturfunktion  $n(k)$  ist zunächst die Frage zu klären, warum wir eine Korrekturfunktion benötigen, um den Wertebereich der Prägnanz von  $[0, 2]$  unabhängig von  $k$  voll ausschöpfen zu können. Hierzu betrachten wir den Ausdruck der Prägnanz (4.1) ohne Berücksichtigung der Korrekturfunktion und definieren

$$P(\cdot, \rho^2, k) = (p(\cdot, \rho^2, k))^{n(k)},$$

das heißt,  $p$  entspricht der Prägnanz  $P$  ohne Berücksichtigung der Korrekturfunktion.

Die Prägnanz wird auf Basis des krümmungsbasierten Strukturtenors berechnet. Um diesen zu bestimmen, wird die quadrierte Hessematrix mit der Gaußfunktion mit festgelegter Standardabweichung  $\rho$  gefaltet. Der Werteverlauf der Spur des krümmungsbasierten Strukturtenors ist daher grundsätzlich positiv und folgt nach Konstruktion der Überlagerung vieler Gaußfunktionen mit Standardabweichung  $\rho$ . An jedem Ort wird dann der Wert der Spur mit dem Median der Spur in der Umgebung mit Radius  $k\rho$  ins Verhältnis gesetzt (siehe Gleichung 4.1). Wenn die Spur an einem bestimmten Ort maximal größer ist als das Median der Umgebung, dann soll die Prägnanz dort den Wert  $P_{\max} = 2$  annehmen.

Diesen Fall maximaler Prägnanz erhalten wir, wenn der Verlauf der Spur des krümmungsbasierten Strukturtenors dem einer einzelnen Gaußfunktion mit Standardabweichung  $\rho$  folgt und wir die Prägnanz am Ort des Maximums der Gaußfunktion messen. Ohne Berücksichtigung der Korrekturfunktion erhalten wir dort (vergleiche mit Gleichung (4.1))

$$p_{\max}(k) = \frac{2g(0, \rho^2)}{g(0, \rho^2) + g\left(\frac{k\rho}{\sqrt{2}}, \rho^2\right)} = \frac{2}{1 + \exp(-k^2/4)}.$$

#### 4 Geometrische Generalisierung

Hierbei haben wir bei der Berechnung des Median der Spur des krümmungsbasierten Strukturensors mit Filterradius  $k\rho$  ausgenutzt, dass die Gaußfunktion rotationssymmetrisch und vom Ursprung aus entlang des Radius streng monoton fallend ist. Der Medianfilter liefert am Ort des Maximums daher den Wert der Gaußfunktion, den die Gaußfunktion bei dem Radius annimmt, der die Hälfte der Fläche des Medianfilters abdeckt, also  $k\rho/\sqrt{2}$ .

Wenn wir nun fordern, dass

$$P_{\max} = 2 = (p_{\max})^{n(k)}$$

gilt, erhalten wir für die Korrekturfunktion den Ausdruck

$$n(k) = \frac{\log(2)}{\log(2) - \log(1 + \exp(-k^2/4))}.$$

In Abbildung 4.2 ist dargestellt, wie sich die Berücksichtigung der Korrekturfunktion für unterschiedliche  $k$ -Werte auf den Verlauf der Prägnanz auswirkt.

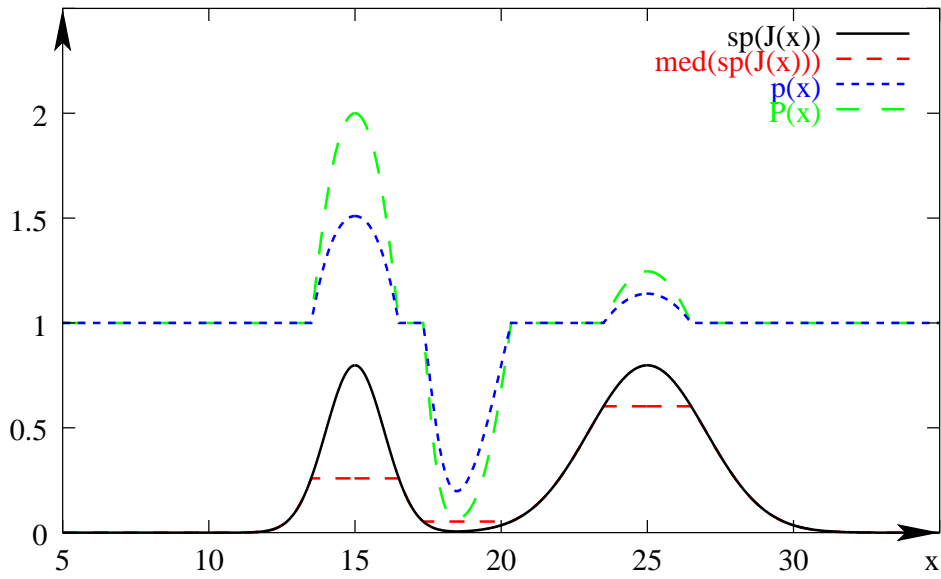
Da wir nun einen Ausdruck für die Korrekturfunktion haben, ist zu begründen, warum wir die Korrektur über eine Potenzierung und nicht etwa durch eine Multiplikation durchführen. Hierzu müssen wir zwei weitere Bedingungen beachten, die zu erfüllen sind. Erstens müssen wir auch nach der Korrektur im Falle durchschnittlicher Prägnanz  $P = 1$  erhalten, das heißt, wenn  $p = 1$  gilt müssen wir nach der Korrektur  $P = 1$  erhalten. Zweitens muss die minimal mögliche Prägnanz den Wert  $P_{\min} = 0$  annehmen, das heißt, wenn  $p = 0$  gilt müssen wir nach der Korrektur  $P = 0$  erhalten. (Dass  $p_{\min} = 0$  ist, werden wir nachher noch zeigen.) Diese beiden Bedingungen können wir nicht zusätzlich erfüllen, wenn wir die Korrektur für  $P_{\max} = 2$  über eine Multiplikation herbeiführen.

Unsere Betrachtung bezog sich bis hierher auf punktartige Strukturen, die sich dadurch auszeichnen, dass sie in jeder Richtung gleichermaßen gekrümmt sind. Wenn wir wissen wollen, wie die maximale Prägnanz linienartiger Strukturen ist, müssen wir berücksichtigen, dass diese in Linienrichtung relativ schwach und orthogonal zur Linienrichtung relativ stark gekrümmt sind. In erster Näherung können wir die maximale Prägnanz linienartiger Strukturen erhalten, wenn wir den zur Linienrichtung orthogonalen Schnitt betrachten, das heißt, die obige zweidimensionale Betrachtung durch eine eindimensionale Betrachtung ersetzen. Wir erhalten dann

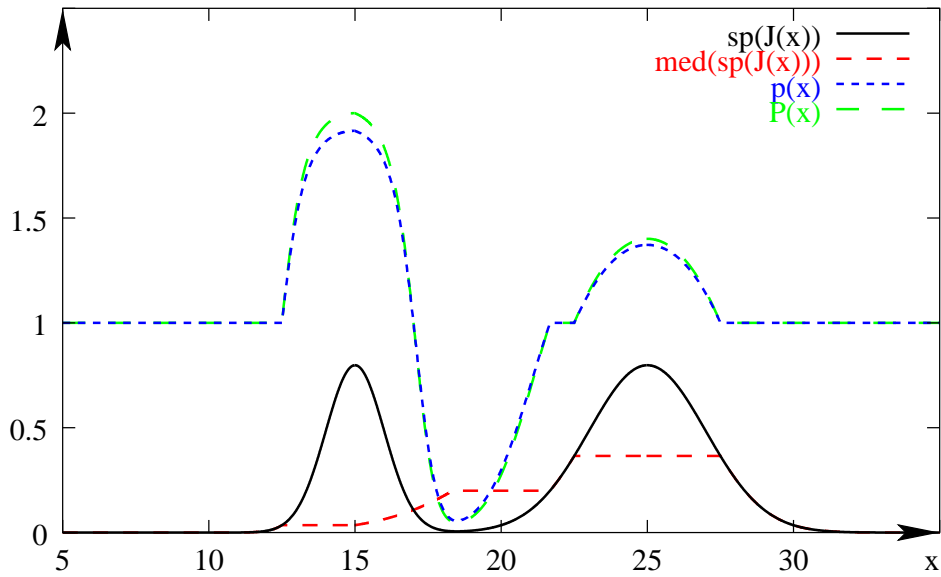
$$p_{\max, \text{linienartig}}(k) = \frac{2g(0, \rho^2)}{g(0, \rho^2) + g\left(\frac{k\rho}{2}, \rho^2\right)} = \frac{2}{1 + \exp(-k^2/8)}.$$



## 4.2 Beschreibung des Formcharakters



(a)  $k = 3$



(b)  $k = 5$

**Abbildung 4.2:** In den Abbildungen wird die Prägnanz auf Grundlage eines vorgegebenen Werteverlaufs der Spur des krümmungsbasierten Strukturtensors einer willkürlichen, eindimensionalen Oberflächenfunktion (es gelte  $\sigma^2 = \rho^2 = 1$ ) für  $k = 3$  und  $k = 5$  mit und ohne Berücksichtigung der Korrekturfunktion dargestellt.

## 4 Geometrische Generalisierung

und

$$P_{\text{max,linienartig}}(k) = (p_{\text{max,linienartig}}(k))^{n(k)}.$$

Der Unterschied zur zweidimensionalen Betrachtung wirkt sich bei der Berechnung des Medianfilters aus. Im eindimensionalen Fall ergibt der Medianfilter mit Filterradius  $k\rho$  am Ort des Maximums den Wert der Gaußfunktion beim Radius  $k\rho/2$ . Im zweidimensionalen Fall lieferte der Medianfilter den Wert der Gaußfunktion beim Radius  $k\rho/\sqrt{2}$ . Die Auswirkung dieses Unterschieds finden wir in Abbildung 4.3 dargestellt. Dort ist zu sehen, dass die Prägnanz zumindest für  $k < 7$  deutlich sensitiver auf punktartige Strukturen als auf linienartige Strukturen reagiert.

Am eindimensionalen Fall lässt sich nun noch zeigen, dass  $p_{\min} = 0$  ist. Wenn wir zwei linienartige Strukturen mit maximaler Prägnanz an den Orten  $\pm a$  haben, genau zwischen diesen die Prägnanz messen und  $a$  gegen  $\infty$  gehen lassen, erhalten wir

$$p_{\min} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2g(a, \rho^2)}{g(a, \rho^2) + g(a - \frac{k\rho}{2}, \rho^2)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \exp\left(\frac{ak}{2\rho}\right) \exp(-k^2/8)} = 0.$$

### 4.2.3 Beschreibung der Anisotropie

Die Anisotropie des Formcharakters kann mit Hilfe einer Eigenwertanalyse des krümmungsbasierten Strukturtenors beschrieben werden. Betrachten wir dazu die normierte tensorielle Größe

$$\mathbf{A}(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2) = \frac{2\mathbf{J}_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2)}{\text{sp}(\mathbf{J}_2(u(\mathbf{x}, \sigma^2), \rho^2))}, \quad (4.2)$$

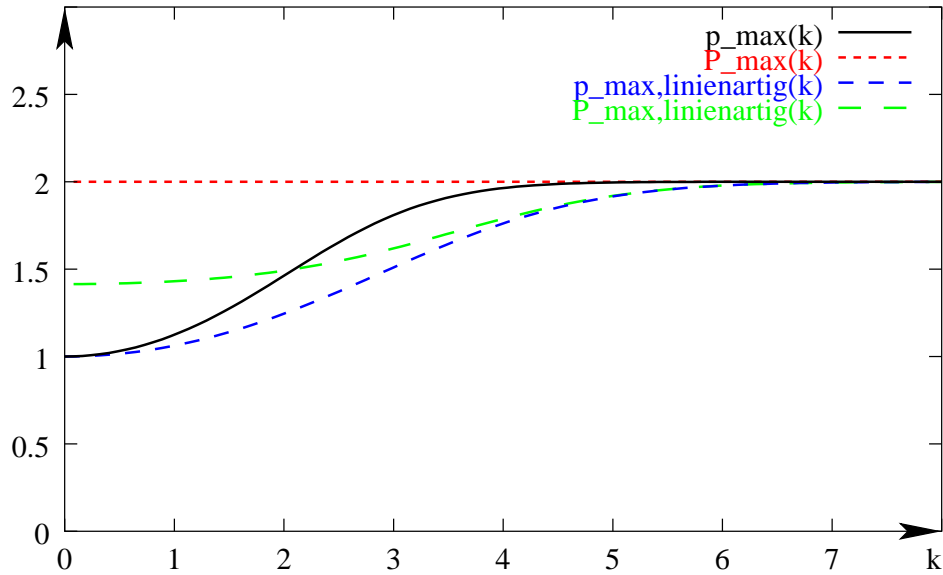
die wir Anisotropie-Tensor nennen wollen. Durch eine Rotation kann dieser in Diagonalform

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T(\phi) \mathbf{A} \mathbf{R}(\phi)$$

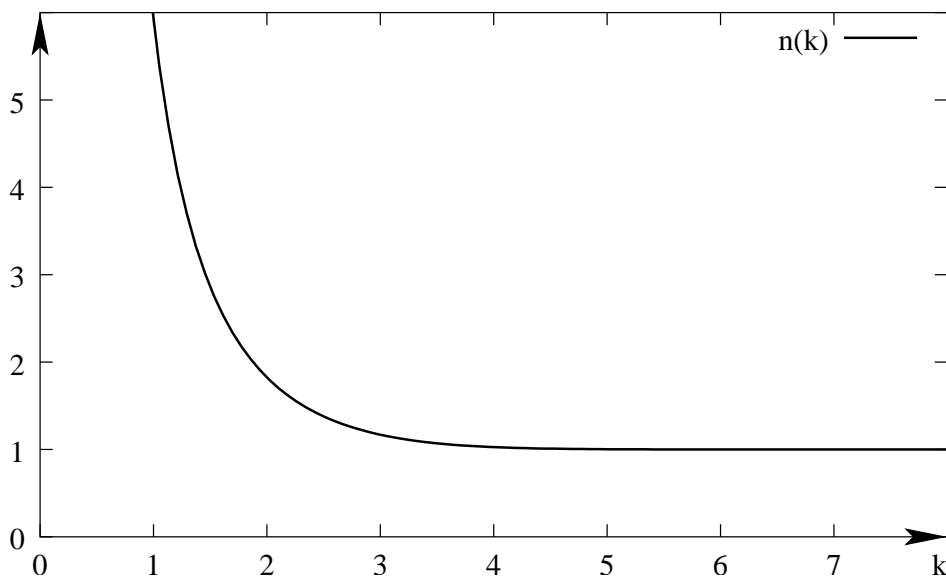
gebracht werden, wobei

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$$

eine Rotationsmatrix ist. Somit werden drei Größen, das sind ein Winkel und zwei Eigenwerte, erhalten, die die Anisotropie beschreiben.



(a) Maximale Prägnanz in Abhängigkeit von  $k$ .



(b) Der Verlauf von  $n(k)$ .

**Abbildung 4.3:** Maximale Prägnanz für punkt- und linienartige Geländestrukturen in Abhängigkeit des Kontextparameters  $k$ , dargestellt mit und ohne Berücksichtigung der Korrekturfunktion  $n(k)$ .

## 4 Geometrische Generalisierung

Die Eigenwerte  $A_i$  lassen sich durch die Eigenwerte von  $J_2$  ausdrücken. Wenn  $\delta_i$  die Eigenwerte von  $J_2$  sind, dann gilt

$$A_i = \frac{2\delta_i}{\delta_1 + \delta_2}, \quad i = 1, 2.$$

Da  $J_2$  positiv definit ist, sind dessen Eigenwerte nicht negativ und es ergibt sich der Wertebereich  $A_i \in [0, 2]$  und die Bedingung  $A_1 + A_2 = 2$ . Anschaulich sind die Eigenwerte  $A_i$  als relative gemittelte quadrierte Hauptkrümmungen der Geländeoberfläche auf der Skala  $\sigma$  zu interpretieren. Relativ ist in dem Sinne zu verstehen, dass beide gemittelten quadrierten Hauptkrümmungen zueinander ins Verhältnis gesetzt werden, was wie eine Normierung wirkt. Der Unterschied zwischen  $A_1$  und  $A_2$  spiegelt demnach die Anisotropie des Formcharakters wider.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $A_1 \geq A_2$ , so ist  $\phi$  der Richtungswinkel des größten Eigenwerts. Stellen wir uns eine linienartige Geländestruktur vor, so zeigt  $\phi$  orthogonal zur Linienrichtung, da in dieser Richtung die größte gemittelte quadrierte Krümmung zu erwarten ist. Der Richtungswinkel der Linienrichtung ergibt sich somit zu  $\phi \pm 90^\circ$ .

Im Falle der Isotropie gilt  $A_1 = A_2 = 1$  und der Richtungswinkel  $\phi$  ist nicht definiert, da der Anisotropie-Tensor zur Einheitsmatrix entartet und per definitionem  $\mathbf{R}^T(\phi) \mathbf{R}(\phi) = \mathbf{I}$  für alle Drehwinkel  $\phi$ .

### 4.3 Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung

Bis zu dieser Stelle haben wir erarbeitet, was wir unter einer Geländeoberfläche und deren Formcharakter verstehen und wie wir die Geländeoberfläche mathematisch repräsentieren und deren Formcharakter beschreiben. Hierauf bezogen haben wir Forderungen aufgestellt – aufgeschlüsselt nach punkt-, linien- und flächenartigen Geländestrukturen – die eine geometrische Generalisierung erfüllen muss.

Wir werden im Folgenden die geometrische Generalisierung im Rahmen des Skalenraum-Formalismus darstellen. Wie in Kapitel 3 beschrieben, betten wir damit das Ergebnis einer geometrischen Generalisierung in ein Kontinuum mit eindeutigem Skalenparameter ein. Zur Formulierung werden wir ein Diffusionsverfahren vorstellen, das lokal adaptiv zu steuern und dessen Diffusionsparameter  $t$  an die räumliche Skala zu binden ist.

#### 4.3.1 Lokal adaptive Diffusionsgleichung

Eine Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung von DHM sollte sich sehr ähnlich der Gaußschen Diffusion verhalten. Dafür gibt es mehrere gute Gründe. Zum Beispiel:

**Glättungseigenschaft** Die Gaußsche Diffusion glättet homogen und isotrop. Es findet keine Aufrauung statt und keine neuen Strukturen werden erzeugt. (Abgesehen von den Fällen, bei denen großskalige Strukturen durch das Entfernen von kleinskaligen Strukturen sichtbar werden – was jedoch nicht als Strukturzeugung zu interpretieren ist.) Somit nimmt die Einfachheit der Beschreibung monoton im Verlauf der Diffusion zu.

**Mittelwerterhaltung** Die Gaußsche Diffusion erhält den Mittelwert der zu glättenden Funktion. Die Anforderung der Exaktheit der Höhenapproximation wird so auf eine natürliche Art und Weise erfüllt.

**Eindeutiger Skalenbegriff** Die Streuung, der dem Diffusionsparameter  $t$  über die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.2) zugeordneten Gaußfunktion, ist ein natürliches Maß für die Skala.

**Skaleninvarianz** Die Gaußsche Diffusion ist skaleninvariant. Das muss auch für eine rein geometrische Generalisierung gelten. Eine Skalenabhängigkeit ergibt sich durch eine begriffliche Generalisierung und deren zu Grunde liegendes semantisches Modell, auf die wir im Rahmen dieser Arbeit nicht eingehen werden.

Somit ist der Gaußsche Skalenraum zunächst so gut geeignet, dass man gute Gründe vorlegen muss, wenn man davon abweichen will. Wir betrachten daher die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u) \quad (4.3)$$

wobei der Diffusionstensor

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

bei Abwesenheit guter Gründe die Einheitsmatrix ist.

Durch die Eigenschaft der Erhaltung des Mittelwerts ist gewährleistet, dass durch den Gaußschen Skalenraum auf der jeweiligen Skala ein repräsentativer Höhenwert für jeden Ort angegeben wird. Wir definieren das hiermit als geometrisch *ausreichend* genau und erfüllen Forderung (F1) auf Seite 22 somit per definitionem, wenn wir nicht vom Gaußschen Skalenraum abweichen.

#### 4 Geometrische Generalisierung

Neben der ausreichenden geometrischen Genauigkeit verlangt Forderung (F2) auf Seite 22 eine zutreffende Darstellung des Formcharakters. Wir werden hierzu die Diffusion lokal adaptiv so steuern, dass der Formcharakter, den wir durch den krümmungsbasierten Strukturtensor beschreiben, betont wird. Dies ist eine Abweichung von der Gaußschen Diffusion, die durch die Steuerparameter für Anisotropie und Prägnanz (Abschnitt 4.1) gesteuert werden kann.

Diese Abweichung ist klein zu halten, um keinen Widerspruch zu Forderung (F1) zu erzeugen und die oben genannten Vorteile des Gaußschen Skalenraums auszunutzen. Dann liefert uns insbesondere der eindeutige Skalenbegriff des Gaußschen Skalenraums über die Beziehung

$$t = \frac{1}{2}\sigma^2$$

eine Kopplung des Diffusionsparameters  $t$  mit der räumlichen Skala  $\sigma$  des DHM und wir können die Lösung der Diffusionsgleichung  $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\sigma^2)$  mit dem geometrisch generalisierten DHM identifizieren.

Die Lösung  $u(\mathbf{x}, t)$  der Differentialgleichung ist für  $t > 0$  nach Konstruktion glatt, das heißt insbesondere differenzierbar, daher kann der Diffusionsparameter  $t$  als Glättungsparameter (vergleiche Abschnitt 2.2.3) bei der Berechnung des krümmungsbasierten Strukturensors dienen, den wir als  $J_2(u(\mathbf{x}, t), \rho^2)$  schreiben. Die Beschreibung des Formcharakters von  $u(\mathbf{x}, t)$  auf der dem Diffusionsparameter  $t$  entsprechenden Skala erhalten wir, wenn wir

$$t = \frac{1}{2}\rho^2$$

annehmen und somit den Integrationsparameter an die Diffusionsparameter koppeln. Wir berechnen dann den krümmungsbasierten Strukturtensor, auf dessen Basis Prägnanz und Anisotropie zur lokal adaptiven Steuerung der Diffusionsgleichung ermittelt werden, durch

$$J_2(u(\mathbf{x}, t), t) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}(u(\mathbf{x}, t)))^2 * g(\mathbf{x}, t), \quad (4.4)$$

wobei  $g(\mathbf{x}, t)$  die zweidimensionale Gaußfunktion mit Varianz  $\sigma^2 = 2t$  ist. Weickert (1999) hebt in diesem Zusammenhang hervor, dass halblokale Schätzungen, die lokale Aussagen über Umgebungen liefern wie zum Beispiel der Strukturtensor, besonders geeignet zur lokalen Adaption des Diffusionstensors sind, wenn linienartige Strukturen berücksichtigt werden sollen (siehe dazu auch Carmona und Zhong 1998).

Werte  $\kappa$  des Diffusionstensors größer Eins ( $> 1$ ) bewirken eine zu  $\kappa$  proportionale Beschleunigung der Diffusion und Werte kleiner Eins ( $< 1$ ) eine proportionale Verlangsamung. Der tensorielle Charakter von  $\mathbf{D}$  ermöglicht eine richtungsabhängige Variation der Diffusion. Bei einer Beschleunigung der Diffusion werden die betroffenen Gebie-

### 4.3 Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung

te stärker als durch die Gaußsche Diffusion geglättet, die uns als Referenz dienen soll. In diesen Gebieten vorhandene Strukturen werden hierdurch in ihrer Ausprägung geschwächt oder – im Sinne eines Generalisierungsverfahrens – entfernt. Eine Verlangsamung der Diffusion hingegen erhält die Strukturen in den betroffenen Gebieten. Nimmt der Diffusionstensor an einem Ort den Wert Null (0) an, so wird die Diffusion dort vollständig gestoppt und die betroffenen Strukturen bleiben vollständig erhalten.

Wir wollen die Adaption ganz allgemein anhand des durch den Krümmungsbasierten Strukturtensor beschriebenen Krümmungsverhaltens ausrichten. Hohe Krümmungswerte an einem Ort weisen ihn als bedeutsam und niedrige Krümmungswerte als weniger bedeutsam aus. Die Werte des Diffusionstensors müssen daher umgekehrt zur Krümmung gesetzt werden. Bei hohen Krümmungswerten muss der Diffusionstensor niedrige Werte annehmen, damit die bedeutsamen Strukturen am Ort erhalten bleiben, und bei niedrigen Krümmungswerten muss der Diffusionstensor hohe Werte annehmen, damit die als nicht bedeutsam erkannten Strukturen entfernt werden.

Bei der Generalisierung werden wir Prägnanz und Anisotropie des Formcharakters besonders berücksichtigen. Um den Einfluss dieser beiden Aspekte des Formcharakters getrennt regeln zu können, setzen wir den Diffusionstensor wie folgt an:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_P \cdot \mathbf{D}_A.$$

Der erste Anteil  $\mathbf{D}_P$  berücksichtigt die Prägnanz des Formcharakters, während der zweite Anteil  $\mathbf{D}_A$  die Anisotropie berücksichtigt.

#### Einführung transparenter Steuerparameter und Wahl einer Gewichtsfunktion

Wir benötigen nun Steuerparameter, damit wir den Einfluss des Formcharakters auf  $\mathbf{D}_P$  und  $\mathbf{D}_A$  regeln können. Daher führen wir eine Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  ein, die  $P$ ,  $A_1$  und  $A_2$  in transparenter Weise regelbar in Werte des Diffusionstensors umsetzt. Hierbei steht  $\kappa$  jeweils für  $P$ ,  $A_1$  oder  $A_2$ . Der Steuerparameter  $\alpha \geq 0$  legt den Verlauf der Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  fest und regelt somit die Umsetzung der  $\kappa$ -Werte. Bevor wir  $w(\kappa, \alpha)$  explizit einführen können, müssen wir zuerst klären, welche Anforderungen wir an die Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  zu stellen haben.

Zunächst soll der Diffusionstensor dort hohe Werte annehmen, wo die Krümmung niedrig ist und umgekehrt. Da sich  $P$ ,  $A_1$  und  $A_2$  in diesem Sinne proportional zur Krümmung verhalten, muss die Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  *monoton fallend* sein. Das heißt, wenn  $P$ ,  $A_1$  oder  $A_2$  groß sind, muss die Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  jeweils kleine Werte liefern und umgekehrt.

#### 4 Geometrische Generalisierung

Wenn  $P = 1$  (ein Ort ist durchschnittlich prägnant) oder  $A_1 = A_2 = 1^1$  (ein Ort ist isotrop) gilt, existiert für uns in dieser Hinsicht kein Grund vom Gaußschen Skalenraum abzuweichen und der entsprechende Anteil des Diffusionstensors muss gleich der Einheitsmatrix sein. Wir fordern daher einerseits von der Gewichtsfunktion

$$w(1, \alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

und müssen andererseits bei der Aufstellung der Anteile  $\mathbf{D}_P$  und  $\mathbf{D}_A$  darauf achten, dass in dem beschriebenen Falle  $\mathbf{D}_P$  beziehungsweise  $\mathbf{D}_A$  gleich der Einheitsmatrix wird. Das heißt, falls  $w(P, \alpha) = 1$  gilt, muss  $\mathbf{D}_P = \mathbf{I}$  gelten, und falls  $w(A_1, \alpha) = 1$  und gleichzeitig  $w(A_2, \alpha) = 1$  gilt, muss  $\mathbf{D}_A = \mathbf{I}$  gelten.

Generell muss uns der Steuerparameter  $\alpha$  die Möglichkeit bieten, nicht vom Gaußschen Skalenraum abzuweichen, das heißt, den Verlauf der Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  so festzulegen, dass der Diffusionstensor unabhängig vom Formcharakter immer gleich der Einheitsmatrix ist. Wir legen diesen Fall für  $\alpha = 0$  fest und fordern

$$w(\kappa, 0) = 1 \quad \forall \kappa \in [0, 2],$$

womit nach unserer vorherigen Vereinbarung  $\mathbf{D}_P = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{D}_A = \mathbf{I}$  gilt.

Für  $\alpha > 0$  soll die Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  mit wachsendem  $\alpha$  von der konstanten Abbildung abweichen und somit der Einfluss des Formcharakters auf die Diffusion steigen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Diffusion im Mittel dem Gaußschen Fall entspricht. Da wir nun einerseits an jedem Ort nach Konstruktion die Bedingung  $A_1 + A_2 = 2$  erfüllen und uns andererseits bei der Bestimmung der Prägnanz eines Ortes auf den *Median* der Umgebung bezogen haben, haben wir im Mittel immer genau so viele Werte  $\kappa > 1$  wie  $\kappa < 1$ , die in die Bestimmung des Diffusionstensors eingehen. Die Idee ist es nun zu fordern, dass die Diffusion für  $\kappa > 1$  nur so weit zur Entfernung von nicht bedeutsamen Strukturen beschleunigt werden darf, wie sie andernorts für  $\kappa < 1$  zur Erhaltung von bedeutsamen Strukturen verlangsamt wird, so dass im Mittel wie im Gaußschen Falle geglättet wird. Wir fordern daher, dass die Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  die Symmetriebedingung

$$w(1 - x, \alpha) - 1 = 1 - w(1 + x, \alpha) \quad \forall x \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}_+$$

erfüllt, womit auch automatisch die Integralbedingung

$$\int_0^2 w(\kappa, \alpha) d\kappa = 2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass nach Konstruktion  $A_1 + A_2 = 2$  gilt.



### 4.3 Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung

erfüllt ist.

Da negative Werte des Diffusionstensors zu einer instabilen Rückwärtsdiffusion führen würden, müssen wir

$$w(\kappa, \alpha) \geq 0$$

fordern. Zusammen mit der Symmetriebedingung ergibt sich daraus, dass der Wertebereich von  $w(\kappa, \alpha)$  auf das Intervall  $[0, 2]$  beschränkt ist. Die hierdurch erreichte Begrenzung der Werte des Diffusionstensors ist sinnvoll, denn einerseits führen hier sehr große Werte zu Instabilitäten in der Lösung der Diffusionsgleichung und andererseits ist eine zu starke Abweichung vom Verhalten des Gaußschen Skalenraums nicht wünschenswert.

Eine Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha) : [0, 2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 2]$ , die alle genannten Forderungen erfüllt, ist die modifizierte Sigmoid-Funktion

$$w(\kappa, \alpha) = \frac{2}{e^{-2\alpha(1-\kappa)} + 1} \quad (4.5)$$

(siehe Abbildung 4.4). Für diese monoton fallende Funktion gilt

$$\begin{aligned} w(0, \alpha) &= w_{\max}(\alpha) \geq 1, \\ w(1, \alpha) &= 1, \\ w(2, \alpha) &= w_{\min}(\alpha) \leq 1 \end{aligned}$$

und

$$w_{\min}(0) = w_{\max}(0) = 1,$$

wobei  $w_{\max}(\alpha)$  und  $w_{\min}(\alpha)$  streng monoton steigende, beziehungsweise streng monoton fallende Funktionen sind, die den Wertebereich der Gewichtsfunktion  $w(\kappa, \alpha)$  in Abhängigkeit vom Steuerparameter  $\alpha$  angeben.

Für kleine Abweichungen von 1 verhält sich  $w(\kappa, \alpha)$  linear (negativ) proportional mit Proportionalitätskonstante  $-\alpha$ . Aus dem Wertebereich  $[0, 2]$  von  $\kappa$  ergeben sich in Abhängigkeit vom Steuerparameter  $\alpha$  die Extremalwerte

$$w_{\max}(\alpha) = \frac{2}{e^{-2\alpha} + 1} \in [1, 2]$$

und

$$w_{\min}(\alpha) = \frac{2}{e^{2\alpha} + 1} \in [0, 1],$$

die ein Maß dafür geben, wie weit vom Gaußschen Skalenraum abgewichen wird.

## 4 Geometrische Generalisierung

### Berücksichtigung der Prägnanz

Die Prägnanz bestimmt, wie deutlich und scharf sich Krümmungsstrukturen ausprägen. Bei unterdurchschnittlicher Prägnanz ( $< 1$ ) gehen wir davon aus, dass flächenartige Geländestrukturen repräsentiert werden, die von nicht bedeutsamen Strukturen überlagert werden. Die nicht bedeutsamen Strukturen sind durch die geometrische Generalisierung zu entfernen. Dies geschieht durch eine Verstärkung der Diffusion. Überdurchschnittliche Prägnanz ( $> 1$ ) deutet bedeutsame Strukturen an, die durch eine Verringerung der Diffusion zu erhalten sind. Der Idee von Perona-Malik (siehe Seite 46) folgend, passen wir deren Ansatz an unser Problem an und wählen

$$\mathbf{D}_P = w(P(k), \alpha_P) \mathbf{I}, \quad k, \alpha_P \in \mathbb{R}_+.$$

Damit werden prägnante Strukturen erhalten und nicht prägnante Strukturen entfernt.  $\alpha_P$  dient als Prägnanz-Steuerparameter für die geometrische Generalisierung. Im Fall  $\alpha_P = 0$  wird die Prägnanz nicht bei der geometrischen Generalisierung berücksichtigt.

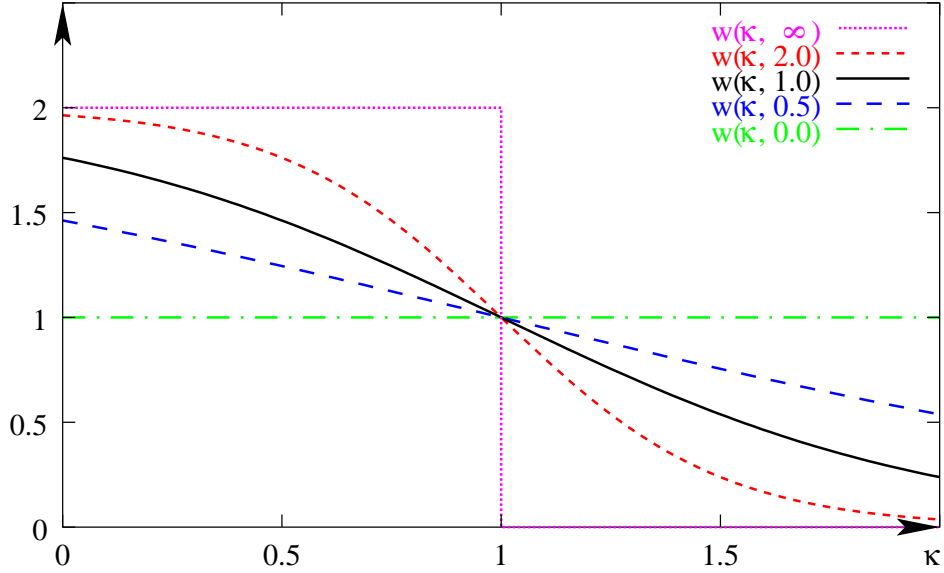
### Berücksichtigung der Anisotropie

Um die Anisotropie des Formcharakters zu berücksichtigen, wählen wir einen Ansatz ähnlich der Kohärenz verstärkenden Diffusion von Weickert (siehe Seite 46). Die Diffusion orthogonal zur Linienrichtung wird abgeschwächt, um die relativ starke Krümmung in dieser Richtung zu erhalten. In Linienrichtung wird die Diffusion erhöht, um kleinräumige Undulationen und Variationen des Linienverlaufs zu entfernen. Die Anisotropie wird durch diese Maßnahmen erhalten, da in Richtung der schwächsten Krümmung am stärksten geglättet wird und umgekehrt. Hierdurch wird der Unterschied zwischen beiden gemittelten Hauptkrümmungen verstärkt, was gegenüber isotroper Gaußscher Glättung die Anisotropie erhöht. Für den Diffusionstensoranteil der Anisotropie erhalten wir als Umsetzung der gerade verbal umschriebenen Forderungen

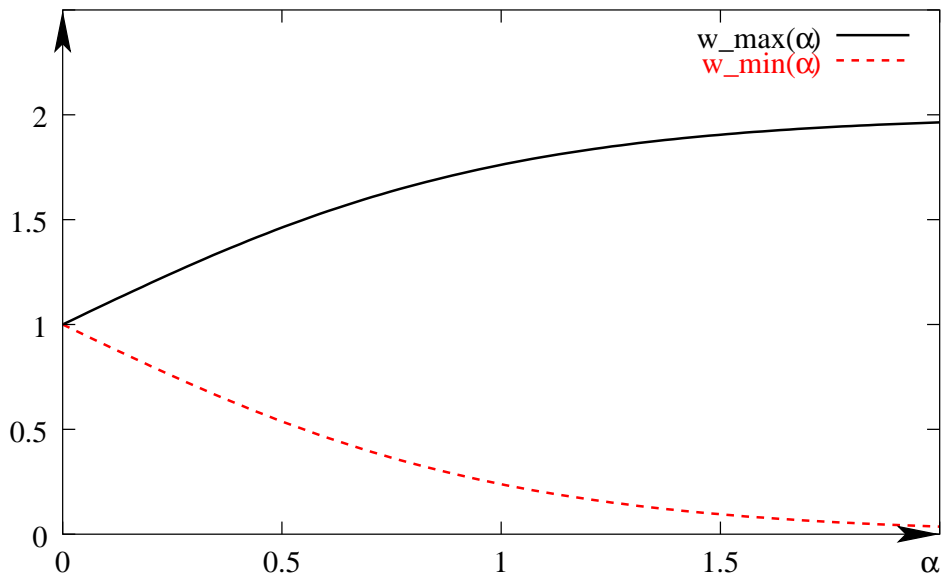
$$\mathbf{D}_A = \mathbf{R}(\phi) \begin{pmatrix} w(A_1, \alpha_A) & 0 \\ 0 & w(A_2, \alpha_A) \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\phi), \quad \alpha_A \in \mathbb{R}_+.$$

Ebenso wie bei der Prägnanz dient  $\alpha_A$  hier als Anisotropie-Steuerparameter für die geometrische Generalisierung. Entsprechend wird im Fall  $\alpha_A = 0$  die Anisotropie nicht bei der Generalisierung berücksichtigt.

### 4.3 Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung



(a)  $w(\kappa, \alpha)$  für unterschiedliche feste  $\alpha$ -Werte.



(b)  $w_{\min}(\alpha)$  und  $w_{\max}(\alpha)$  für den angenommenen Wertebereich von  $\kappa$ .

**Abbildung 4.4:** (a) Modifizierte Sigmoid-Funktion als Gewichtsfunktion für unterschiedliche feste  $\alpha$ -Werte. (b) Maximale und minimale Werte der Gewichtsfunktion in Abhängigkeit von  $\alpha$  bei einem angenommenen Wertebereich von  $\kappa \in [0, 2]$ .

## 4 Geometrische Generalisierung

### 4.3.2 Fallbeispiele

Im allgemeinen Fall ergibt sich für den Diffusionstensor

$$\mathbf{D} = w(P(k), \alpha_P) \mathbf{R}(\phi) \begin{pmatrix} w(A_1, \alpha_A) & 0 \\ 0 & w(A_2, \alpha_A) \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\phi). \quad (4.6)$$

Für die Konstruktion von Fallbeispielen können wir vereinfachend  $\phi = 0$  annehmen, da die Diffusionsgleichung von Lage und Ausrichtung des Koordinatensystems unabhängig ist (Translations- und Rotationsinvarianz).

#### Homogene, isotrope Fläche

Homogenität bedeutet in Hinblick auf die Prägnanz, dass die gemittelte quadrierte Krümmung im lokalen Kontext nicht mit dem Ort variiert. Dies bedeutet ausdrücklich nicht, dass die Krümmung konstant oder verschwindend klein sein muss. Der zentrale Aspekt ist der Mittelungsvorgang. Viele kleinräumige Variationen der Krümmung innerhalb der  $\sigma$ -Umgebung müssen erst nach der quadrierten Mittelung innerhalb des lokalen Kontextes konstant sein, damit wir das Attribut homogen verwenden. Im Falle der Homogenität ist die Spur des krümmungsbasierten Strukturtenors gleich ihrem Median über den lokalen Kontext und daher erhalten wir für das Prägnanzmaß  $P = 1$ .

Eine homogene Fläche kann eine Vorzugsrichtung enthalten. Kleinräumige linienartige Geländestrukturen in kohärenter Ausrichtung, zum Beispiel, sind gemittelt homogen, weisen aber eine Vorzugsrichtung auf und sind daher auch nach der Mittelung nicht isotrop. Liegt *keine* kleinräumige kohärente Ausrichtung vor, gilt  $A_1 = A_2 = 1$ .

Für eine homogene, isotrope Fläche ist daher

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}$$

und das Generalisierungsverfahren verhält sich wie der Gaußsche Skalenraum. Da Homogenität und Isotropie Eigenschaften sind, die die Gleichheit aller Orte beschreiben, liefern sie auch keine Argumente um lokal von der Gaußschen Diffusion abzuweichen und das Ergebnis entspricht demnach unserer eingangs aufgestellten Forderung.

#### Homogene anisotrope Fläche

Eine homogene anisotrope Fläche kann aus vielen kleinräumigen kohärent ausgerichteten linienartigen Geländestrukturen bestehen, die in Linienrichtung sehr schwach und

### 4.3 Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung

orthogonal dazu sehr stark gekrümmt sind. Wir nehmen an, die Fläche sei parallel der y-Achse ausgerichtet ( $\phi = 0$ ), dann erhalten wir nach Mittelung auf Grund der deutlichen Ausrichtung  $A_1 \gg A_2$  und auf Grund der Homogenität  $P = 1$ . Der Diffusionstensor strebt somit gegen

$$\mathbf{D} \approx \begin{pmatrix} w_{\min}(\alpha_A) & 0 \\ 0 & w_{\max}(\alpha_A) \end{pmatrix}.$$

In Richtung der y-Achse (Linienrichtung) ist für die Diffusion

$$D_{22} \approx w_{\max}(\alpha_A) \geq 1$$

maßgeblich. Die Diffusion in dieser Richtung wird durch die Anisotropie um den Faktor  $w_{\max}(\alpha_A)$  beschleunigt. Die hierdurch verstärkte Glättung schwächt insbesondere Störungen wie Undulationen oder Unterbrechungen des Linienverlaufs.

Orthogonal zur Linienrichtung steuert

$$D_{11} \approx w_{\min}(\alpha_A) \leq 1$$

die Diffusion. In diesem Fall bremst die Anisotropie die Diffusion um den Faktor  $w_{\min}(\alpha_A)$ . Die Glättung wird dadurch vermindert und der charakteristisch anisotrope Formcharakter bleibt stärker erhalten als im Falle der Gaußschen Diffusion.

Für eine homogene anisotrope Fläche hat nur der Anisotropie-Steuerparameter  $\alpha_A$  Einfluss auf die Generalisierung. Da im Falle der Homogenität keine prägnanten oder unprägnanten Strukturen erwartet werden können, darf der Prägnanz-Steuerparameter  $\alpha_P$  keinen Einfluss auf die Generalisierung nehmen. Unser Generalisierungsverfahren verhält sich hier so, wie wir es fordern.

#### Isolierte Spitze

Eine isolierte Spitze ist ein Beispiel einer prägnanten isotropen punktartigen Geländestruktur. Eine Spitze hat keine Vorzugsrichtung (in der Horizontalen), daher können wir von Isotropie ausgehen und erhalten  $A_1 = A_2 = 1$ . Da eine Spitze lokal sehr stark gekrümmt ist erhalten wir am Ort der Spitze eine hohe Prägnanz, was  $P \approx 2$  entspricht. Damit erhalten wir für den Diffusionstensor

$$\mathbf{D} \approx w_{\min}(\alpha_P) \mathbf{I}.$$

Die Diffusion wird an prägnanten Orten um maximal den Faktor  $w_{\min}(\alpha_P)$  gemindert.

## 4 Geometrische Generalisierung

Der charakteristisch prägnante Formcharakter wird so besser erhalten als im Falle der Gaußschen Diffusion. Wie zu fordern ist, hat der Anisotropie-Steuerparameter  $\alpha_A$  in diesem isotropen Fall keinen Einfluss auf die Generalisierung.

### Isolierte Kante

Eine isolierten Kante ist ein Beispiel einer prägnanten linienartigen Geländestruktur. In Richtung der Kante ist die Krümmung relativ sehr schwach und orthogonal dazu relativ sehr stark. Da die Krümmung in orthogonaler Kantenrichtung im lokalen Kontext relativ sehr stark ist (*isolierte Kante*), nimmt die Prägnanz am Ort der Kante den maximalen Wert für eine linienartige Struktur  $P = P_{\max, \text{linienartig}}(k)$  an. Wir nehmen an, die Kante sei parallel zur y-Achse ausgerichtet ( $\phi = 0$ ), dann erhalten wir  $A_1 \gg A_2$  und

$$\mathbf{D} \approx w(P_{\max, \text{linienartig}}(k), \alpha_P) \begin{pmatrix} w_{\min}(\alpha_A) & 0 \\ 0 & w_{\max}(\alpha_A) \end{pmatrix}.$$

Orthogonal zur Kante steuert

$$D_{11} \approx w(P_{\max, \text{linienartig}}(k), \alpha_P) \cdot w_{\min}(\alpha_A)$$

die Diffusion. Hier bremst die Anisotropie die Diffusion maximal um den Faktor  $w_{\min}(\alpha_P) \cdot w_{\min}(\alpha_A)$ . Die Glättung wird dadurch vermindert und die Krümmung der Kante bleibt stärker erhalten als im Falle der Gaußschen Diffusion.

In Richtung der y-Achse (Richtung der Kante) ist für die Diffusion

$$D_{22} \approx w(P_{\max, \text{linienartig}}(k), \alpha_P) \cdot w_{\max}(\alpha_A)$$

maßgeblich. Dieser Fall ist komplizierter als alle vorausgegangenen, da Beschleunigung oder Verminderung der Diffusion von der Wahl der drei Parameter  $k$ ,  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  abhängt. Generell dominiert in solchen Fällen die Erhaltung (die Verminderung der Diffusion), da die Gewichtsfunktion die Eigenschaft aufweist, dass  $w_{\min}(\alpha) \cdot w_{\max}(\alpha) < 1$  für alle  $\alpha > 0$ . Die Diffusion in Kantenrichtung ist allerdings, falls  $\alpha_A > 0$ , immer stärker als die Diffusion orthogonal zur Kante.

Prägnante anisotrope Strukturen werden demnach bei gleicher Wahl von  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$ , wenn  $k$  groß genug ist, in ihrem gesamten Verlauf erhalten. Beide Steuerparameter von Prägnanz und Anisotropie beeinflussen die Generalisierung.

Dieses letzte Beispiel hat insbesondere Bedeutung zur Klärung der Frage, wie sich die Generalisierung gegenüber anisotropen linienartigen Strukturen verhält, die nur an ein-

#### 4.4 Geometrischer Informationsgehalt eines Digitalen Höhenmodells

zelenen Punkten eine hohe Prägnanz aufweisen. Wie wir gesehen haben, dominiert die Erhaltung wenn  $\alpha_p$  und  $\alpha_A$  gleich gesetzt werden. Anisotrope Strukturen werden dabei in ihrem Verlauf nur zwischen den prägnanten Punkten generalisiert. Die prägnanten Punkte, seien sie nun anisotrop oder nicht, werden dabei erhalten.

##### 4.3.3 Skalenraum-Eigenschaften

Einsetzen des Diffusionstensors (4.6) in die Differentialgleichung (4.3) ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( w(P(k), \alpha_p) \mathbf{R}(\phi) \begin{pmatrix} w(A_1, \alpha_A) & 0 \\ 0 & w(A_2, \alpha_A) \end{pmatrix} \mathbf{R}^T(\phi) \nabla u \right) \quad (4.7)$$

und definiert einen pyramidalen Skalenraum, der alle in Kapitel 3 aufgeführten Skalenraum-Axiome erfüllt.

Da die Eigenwerte des Diffusionstensors durch die Wahl der Gewichtsfunktion (4.5) positiv und beschränkt sind, wissen wir durch die Arbeit von Weickert (1994), dass der durch (4.7) definierte Skalenraum regulär und eindeutig ist und das Extremums-Prinzip erfüllt. Durch die Unabhängigkeit des Diffusionstensors von Lage und Höhe ist der Skalenraum *verschiebungs-, translations- und isometrieinvariant* und da der Diffusionstensor mit dem Diffusionsparameter  $t$  skaliert ist der Skalenraum *skaleninvariant*.

#### 4.4 Geometrischer Informationsgehalt eines Digitalen Höhenmodells

Zur Quantifizierung des Unterschieds zwischen einem durch Diffusionsgleichung (4.7) und einem durch Gaußsche Diffusion geometrisch generalisierten DHM, werden wir im Folgenden eine Schätzung des geometrischen Informationsgehalts eines DHM vorstellen. Diffusionsgleichung (4.7) verhält sich, wie wir in Abschnitt 4.3 beschrieben haben, nach Konstruktion ähnlich wie die Gaußsche Diffusion. Jede einzelne lokale Abweichung von der Gaußschen Diffusion ist durch das Bestreben begründet, als relevant erkannte lokale geometrische Informationen zu erhalten. Daher ist insbesondere eine Schätzung des geometrischen Informationsgehalts zur quantitativen Unterscheidung der unterschiedlich geometrisch generalisierten DHM geeignet.

Eine Schätzung für den geometrischen Informationsgehalt eines DHM können wir zum Beispiel über den durch Shannon und Weaver (1949) eingeführten Entropie-Begriff erhalten (siehe zum Beispiel auch Cover und Thomas 1991). Hierzu betrachten wir ein

#### 4 Geometrische Generalisierung

DHM als eine Nachricht, die wir einem Empfänger zur Beschreibung eines Geländes mitteilen wollen. Die Information, die die Beschreibung eines einzelnen Ortes innerhalb des DHM zur gesamten Beschreibung beiträgt, hängt von der Häufigkeit ab, mit der gleichartig zu beschreibende Orte im DHM zu finden sind. Da wir DHM bis jetzt über ihr Krümmungsverhalten beschrieben haben, charakterisieren wir jeden Ort durch einen skalaren Wert  $\kappa(\mathbf{x})$ , der die lokale Krümmung rotationsinvariant beschreibt, wie zum Beispiel die Spur der Hessematrix. Wir weisen jedem Krümmungswert  $\kappa(\mathbf{x})$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu und schreiben für die lokale differentielle Information

$$i(\mathbf{x}) = -\log(p(\kappa(\mathbf{x}))).$$

Die mittlere differentielle Information eines DHM ergibt sich dann als Funktion der Verteilung von  $\kappa$  zu

$$h = -\int_{-\infty}^{\infty} p(\kappa) \log(p(\kappa)) d\kappa \quad (4.8)$$

und wird als differentielle Entropie bezeichnet.

Da wir die Verteilung von  $\kappa$  nicht a priori kennen, müssen wir die differentielle Entropie (4.8) eines DHM schätzen. Hierzu diskretisieren wir die Krümmungswerte und weisen jedem Krümmungsintervall  $i\Delta < \kappa \leq (i+1)\Delta$  eine Wahrscheinlichkeit zu, die dem prozentualen Flächenanteil der Geländeoberfläche entspricht, deren Krümmung in diesem Intervall liegt. Wir erhalten so die von der Diskretisierung abhängige Entropie

$$H(\Delta) = -\sum_{i \in \mathbb{Z}} P(i\Delta < \kappa \leq (i+1)\Delta) \log(P(i\Delta < \kappa \leq (i+1)\Delta)).$$

Eine Mittelung über alle (das heißt,  $N$  groß) Diskretisierungsoffsets liefert die nur noch von der Diskretisierungsweite  $\Delta$  abhängige Entropie

$$\begin{aligned} \overline{H(\Delta)} = & -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} P\left(i\Delta + \frac{n\Delta}{N} < \kappa \leq (i+1)\Delta + \frac{n\Delta}{N}\right) \\ & \cdot \log\left(P\left(i\Delta + \frac{n\Delta}{N} < \kappa \leq (i+1)\Delta + \frac{n\Delta}{N}\right)\right), \end{aligned}$$

durch die wir eine Schätzung der differentiellen Entropie

$$\hat{h} = \overline{H(\Delta)} + \log(\Delta)$$

erhalten (vergleiche Cover und Thomas 1991, Seite 228f.).

Wenn wir das betreffende Gebiet insgesamt betrachten, erwarten wir, dass die differentielle Entropie durch die geometrische Generalisierung im Mittel verringert wird, da



#### 4.4 Geometrischer Informationsgehalt eines Digitalen Höhenmodells

diese ein Vereinfachungsvorgang ist, der als nicht relevant erachtete Informationen verwirft, und dass die Verringerung der differentiellen Entropie durch Gaußsche Diffusion im Mittel größer ist, als durch die Diffusionsgleichung (4.7).

Sporring und Weickert (1997) haben sich ausführlich mit der Entropie von digitalen Bildern in Verbindung mit Skalenräumen beschäftigt. Sie stellen ein spezielles Lyapunov-Funktional der Bildfunktion auf, das als Entropie interpretiert werden kann, wenn man die Bildfunktion als Ortsverteilung der Auftreffwahrscheinlichkeit der einzelnen Lichtquanten bei der Aufnahme des digitalen Bildes interpretiert. Im Gegensatz zu unserer Erwartung in unserem Modell nimmt die Entropie in dem Modell von Sparring und Weickert mit dem Skalenparameter zu. Unsere Fragestellung hat jedoch nichts mit der Ortsverteilung der Auftreffwahrscheinlichkeit von einzelnen Lichtquanten zu tun, sondern mit der Vorkommenswahrscheinlichkeit von unterschiedlichen Geländeformen. Das gegensätzliche Verhalten der Entropie bezüglich des Skalenparameters in beiden Modellen ist somit vollständig zu erklären.

## 4 *Geometrische Generalisierung*

# 5 Lösung der Diffusionsgleichung

In Kapitel 4 haben wir die Diffusionsgleichung (4.7) zur Modellierung der geometrischen Generalisierung eingeführt. Die Lösung dieser Diffusionsgleichung für feste Diffusionsparameter  $t$  mit einem DHM als Anfangsbedingung haben wir dabei als die Durchführung einer geometrischen Generalisierung mit einem Skalenübergang  $\sigma = \sqrt{2t}$  interpretiert. Wir benötigen nun ein Verfahren, das uns die Diffusionsgleichung (4.7) löst. Da wir von einer möglichst allgemeinen Repräsentation des DHM ausgehen wollen, werden wir hierzu die Methode der finiten Elemente einsetzen.

## 5.1 Finite Elemente Modell

Wir gehen zunächst von einem stationären Diffusionsproblem aus, bei dem eine Funktion  $u(\mathbf{x})$  gesucht wird, die ein vorgegebenes Funktional unter vorgegebenen Randbedingungen stationär macht (vergleiche mit dem klassischen Ansatz von Ritz (1909); siehe hierzu auch Schwarz 1991, Seite 41f.). Zur Bestimmung einer Näherungslösung approximieren wir die gesuchte Funktion  $u(\mathbf{x})$  durch eine diskretisierte Funktion  $u_h(\mathbf{x})$ . Hierzu wird ein Satz von linear unabhängigen, dem zu lösenden Problem angepassten Funktionen

$$\varphi_0(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_h(\mathbf{x})$$

aufgestellt und die Näherungsfunktion  $u_h(\mathbf{x})$  als Linearkombination

$$u_h(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^h c_k \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

angesetzt. Die Funktionen  $\varphi_k$  werden so gewählt, dass die Funktion  $\varphi_0(\mathbf{x})$  alle inhomogenen Randbedingungen erfüllt und die Funktionen  $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_h(\mathbf{x})$  alle homogenen Randbedingungen erfüllen (siehe hierzu Courant und Hilbert 1924, Seite 222 oder die Ausführungen von Zienkiewicz 1984, bzw. Schwarz 1991). Die Funktion  $\varphi_0(\mathbf{x})$  entfällt, wenn nur homogene Randbedingungen gelten.

## 5 Lösung der Diffusionsgleichung

Mit Ansatz (5.1) werden alle vorgegebenen Randbedingungen nach Konstruktion für beliebige Koeffizienten  $c_k$  erfüllt und die  $c_k$  sind allein unter der Bedingung zu ermitteln, dass sie das Funktional stationär machen, was auf genau  $h$  Bestimmungsgleichungen führt. Es ist zu beachten, dass die so gefundene Näherungslösung  $u_h(\mathbf{x})$  auf den durch die  $\varphi_k$  aufgespannten Funktionenraum beschränkt ist und daher im Allgemeinen die gesuchte Lösung  $u(\mathbf{x})$  nur approximiert. Es gilt daher, die  $\varphi_k$  dem zu lösenden Problem insofern anzupassen, als die unbekannte gesuchte Lösung  $u(\mathbf{x})$  gut durch die  $\varphi_k$  approximierbar sein muss.

### 5.1.1 Galerkin-Methode und Festsetzung der Randbedingungen

Zur Lösung der instationären, linearen Diffusionsgleichung (4.7) unter homogenen Randbedingungen müssen wir die Zeitabhängigkeit berücksichtigen. Wir setzen daher eine Näherungsfunktion  $u_h(\mathbf{x}, t)$  zunächst in der semidiskreten Form

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^h c_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

an. Die Zeitdiskretisierung werden wir später (Abschnitt 5.1.2) durchführen.

Durch Einsetzen der Näherungsfunktion (5.2) in die Diffusionsgleichung (4.7) erhalten wir die im Allgemeinen nicht verschwindende Residuenfunktion

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^h c_k(t) \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_k(\mathbf{x})) - \sum_{k=1}^h \dot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

wobei wir die Notation  $\dot{c}_k(t) = \partial c_k(t) / \partial t$  verwendet haben. Die Residuenfunktion (5.3) soll nun im Inneren des Gebiets  $\Omega$  möglichst klein werden. Dazu verlangt man, dass das gewichtete Integral der Residuenfunktion über das Gebiet  $\Omega$  verschwindet (*Verfahren der gewichteten Residuen*).

Nach der *Methode von Galerkin* werden als Gewichtsfunktionen der Reihe nach die Ansatzfunktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$  gewählt, womit wir die Bedingungen

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, h \quad (5.4)$$

erhalten. Eine Substitution von  $R(\mathbf{x})$  führt dann zu genau  $h$  Bestimmungsgleichungen

für die  $h$  Koeffizienten  $c_k$ :

$$\sum_{k=1}^h \dot{c}_k \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^h c_k \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_k) \varphi_j \, d\mathbf{x}. \quad (5.5)$$

Die durch die  $c_k$  bestimmte Näherungslösung ist insofern die bestmögliche im Raum der Ansatzfunktionen, als durch die Galerkin-Bedingung (5.4) bewirkt wird, dass die Residuenfunktion (5.3) orthogonal zu dem durch die linear unabhängigen  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$  aufgespannten Raum der Ansatzfunktionen ist (Schwarz 1991, Seite 46). Das heißt, dass die Werte der Näherungslösung im Mittel exakt sind und wir auf Basis der Näherungslösung sichere Aussagen über Mittelwerte treffen können.

Durch Anwendung der ersten Greenschen Identität (Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, vergleiche zum Beispiel Jackson 1983, Seite 52f.) kann die in (5.5) vorkommende höchste Ableitungsordnung um eins reduziert werden und wir erhalten die gleichwertigen Bestimmungsgleichungen

$$\sum_{k=1}^h \dot{c}_k \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_j \, d\mathbf{x} = - \sum_{k=1}^h c_k \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^h c_k \oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \nabla \varphi_k \cdot \mathbf{n} \varphi_j \, ds. \quad (5.6)$$

Zur Lösung der Bestimmungsgleichungen (5.6) sind damit nur noch Ableitungen erster Ordnung zu bestimmen und keine Ableitung der zweiten Ordnung, wie zur Lösung der Bestimmungsgleichungen (5.5). Hierdurch reduzieren sich die Glattheitsanforderungen an die Ansatzfunktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ , wodurch die numerische Implementation an Stabilität gewinnt (vergleiche Abschnitt 5.2.2).

Die Bestimmungsgleichungen (5.6) erhalten ein Randintegral, dessen Berechnung durch die Wahl von Randbedingungen beeinflusst werden kann. Nach den Ergebnissen von Weickert (1994) gilt für die Diffusionsgleichung (4.7) bei Neumannschen Randbedingungen die, wie wir in Abschnitt 4.3 betont haben, für die geometrische Generalisierung wichtige Mittelwerterhaltung. Daher wählen wir zur Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) die homogenen Neumannschen Randbedingungen

$$\mathbf{D} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.7)$$

was bedeutet, dass der Fluss über den Rand null ist. Anschaulich heißt das, dass die Diffusion zwar entlang des Randes, aber nicht senkrecht zum Rand stattfindet. Damit ist zu verstehen, warum genau diese Wahl der Randbedingungen zur Mittelwerterhaltung notwendig ist.

## 5 Lösung der Diffusionsgleichung

Wenn wir (5.7) in (5.6) einsetzen, entfällt das Randintegral. Mit der Notation

$$\mathbf{c} = (c_k), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{M} = (M_{jk}), \quad M_{jk} = \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_j \, d\mathbf{x}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{S} = (S_{jk}), \quad S_{jk} = \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x}, \quad (5.10)$$

erhalten wir dann in kompakter Notation

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{c}} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{c}. \quad (5.11)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  wird *Massematrix* und die Matrix  $\mathbf{S}$  wird *Steifigkeitsmatrix* genannt.

### 5.1.2 Zeitdiskretisierung

Da das Differentialgleichungssystem (5.11) linear ist, kann es durch eine einfache numerische Integration gelöst werden. Dabei ist zu beachten, dass der Diffusionstensor  $\mathbf{D}$  und damit auch die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  zeitabhängig ist. Ein allgemeiner Integrations-schritt mit der Schrittweite  $\Delta t$  lautet dann mit der Matrix  $\mathbf{S}_n$  dem Vektor  $\mathbf{c}_n$  zur Zeit  $t = n \cdot \Delta t$

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n}{\Delta t} = -((1 - \theta) \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{c}_n + \theta \mathbf{S}_{n+1} \cdot \mathbf{c}_{n+1}).$$

Die Wahl von  $\theta \in [0, 1]$  beeinflusst dabei entscheidend die Stabilität der Lösung. Die Wahl  $\theta = 1$  (voll implizite Euler oder rückwärts Euler Methode genannt) garantiert die Stabilität der Lösung unabhängig von der Diskretisierungsweite  $\Delta t$  und weist zudem die besten Glättungseigenschaften auf (für eine ausführliche Diskussion dieser Problematik siehe zum Beispiel Johnson 1987). Die Glättungseigenschaft der Diskretisierung ist für uns von großer Bedeutung, da Oszillationen der Lösung, die ihren Ursprung in der Zeitdiskretisierung haben, in dem generalisierten DHM als bedeutsame Details auftreten, was als zu vermeidender Fehler zu werten ist.

Da für  $\theta = 1$  die größte Stabilität und die geringsten Oszillationen der Lösung zu erwarten sind, wählen wir  $\theta = 1$  und erhalten

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n}{\Delta t} = -\mathbf{S}_{n+1} \cdot \mathbf{c}_{n+1}.$$

Wir haben dann das Problem, dass wir  $\mathbf{S}_{n+1}$  nicht kennen. Wir wissen jedoch, dass der Diffusionstensor  $\mathbf{D}$  (4.6) auf Basis des krümmungsbasierten Struktur tensors (4.4) bestimmt wird und sich durch die doppelte Mittelung bei einem kleinen Zeitschritt  $\Delta t$

nur geringfügig ändert. Wir können also davon ausgehen, dass die Regularisierungseigenschaften von  $\mathbf{S}_{n+1}$  und  $\mathbf{S}_n$  im Rahmen unserer Approximationsgenauigkeit gleich sind. Wir approximieren daher  $\mathbf{S}_{n+1}$  durch  $\mathbf{S}_n$  und erhalten so in jedem Zeitschritt das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{S}_n)}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \mathbf{c}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{c}_n}_{\text{Koeffizientenvektor}} \quad (5.12)$$

## 5.2 Implementation

In Kapitel 5.1 haben wir grundsätzliche Überlegungen zur numerischen Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) vorgestellt und ein iteratives Lösungsverfahren abgeleitet, in dem ein diskreter Zeitschritt, das heißt, ein diskreter geometrischer Generalisierungsschritt, durch das lineare Gleichungssystem (5.12) beschrieben wird. Für die algorithmische Umsetzung sind nun noch folgende Probleme zu lösen:

- Wahl der Ortsdiskretisierung und der Ansatzfunktionen.
- Berechnung des Diffusionstensors für jeden Zeitschritt.
- Berechnung der Masse- und Steifigkeitsmatrixelemente für jeden Zeitschritt.
- Lösung des aufgestellten linearen Gleichungssystems für jeden Zeitschritt.

Auf zwei der Teilprobleme wollen wir nur kurz eingehen:

Da wir, wie wir eingangs dieses Kapitels erwähnt haben, von einer möglichst allgemeinen Repräsentation des zu generalisierenden DHM ausgehen wollen, werden wir von einer Ortsdiskretisierung durch Unterteilung des Grundgebiets in Dreiecke ausgehen. Damit können wir besonders leicht mit Eingangsdaten umgehen, die durch Raster- und Dreiecksnetze repräsentiert werden.

Zur Lösung des aufgestellten linearen Gleichungssystems für jeden Zeitschritt werden wir das Verfahren der konjugierten Gradienten einsetzen. Dieses Standardverfahren (siehe zum Beispiel Braess 1992, Kapitel 4) stellt im Allgemeinen einen guten Kompromiss zwischen Rechenaufwand, Implementationsaufwand und Approximationsgenauigkeit dar.

### 5.2.1 Aufstellung von Elementbeiträgen

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.12) vereinfacht und beschleunigt sich, wenn die Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{S}_n$  dünn besetzt sind. An dieser Stelle kommt die Grundidee der finiten Elemente zum Tragen, mit Ansatzfunktionen zu arbeiten, die nur einen lokalen Träger aufweisen und das Grundgebiet  $\Omega$  so in finite Elemente  $\Delta_e$ , das heißt in kleine Einheiten mit nicht verschwindendem Volumen, zu unterteilen, dass zur Lösung des Gleichungssystems (5.12) für jeden einzelnen Koeffizienten  $c_k$  nur jeweils wenige finite Elemente zu betrachten sind.

Zur Aufstellung der Masse- und Steifigkeitsmatrix berechnen wir dann den Beitrag, den jedes einzelne Element  $\Delta_e$  zu den Matrizen leistet. Durch Aufsummieren erhalten wir

$$M_{jk} = \sum_{\Delta_e} M_{jk}^{(\Delta_e)} = \sum_{\Delta_e} \int_{\Delta_e} \varphi_k \varphi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.13)$$

$$S_{jk} = \sum_{\Delta_e} S_{jk}^{(\Delta_e)} = \sum_{\Delta_e} \int_{\Delta_e} \mathbf{D} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x}. \quad (5.14)$$

Wenn jede Ansatzfunktion  $\varphi_k$  einen Träger hat, der sich jeweils nur über wenige finite Elemente erstreckt, verschwinden die Elementbeiträge  $M_{jk}^{(\Delta_e)}$  und  $S_{jk}^{(\Delta_e)}$  für fast alle Tupel  $(j, k)$  und die Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{S}_n$  sind wie gewünscht dünn besetzt.

Im Folgenden ist dabei zu beachten, dass die Wahl von Gebietsunterteilung und Ansatzfunktionen die erzielbare Rechengenauigkeit bestimmt. Das heißt, es können nur Details der gesuchten Lösung erhalten werden, die durch die Kombination von Gebietsunterteilung und Ansatzfunktionen dargestellt werden können.

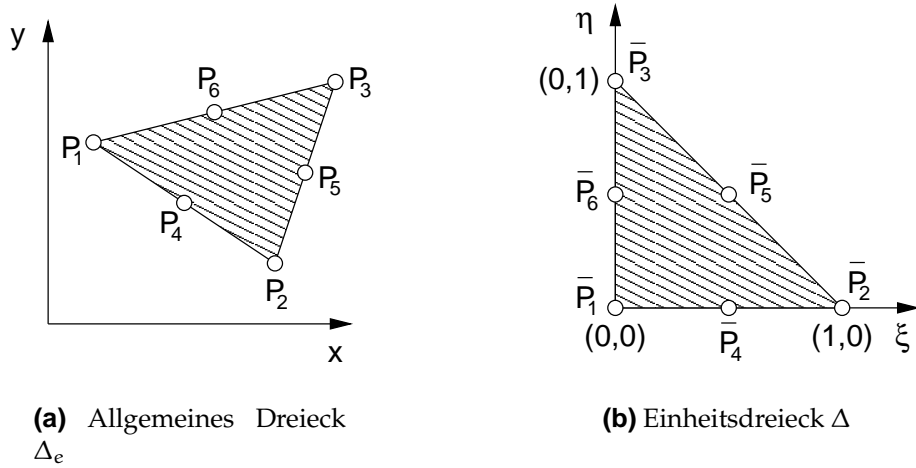
### 5.2.2 Wahl der Ansatzfunktionen

Zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung sind stetige Ansatzfunktionen hinreichend (siehe zum Beispiel Braess 1992, Seite 60ff.). Somit könnten wir stetige Ansatzfunktionen konstruieren, die die Dreiecke der Gebietsunterteilung linear interpolieren. Es ist aber nicht unmittelbar klar, wie aus einer stückweise linearen Oberflächenbeschreibung die zur Berechnung des Diffusionstensors erforderlichen zweiten Ableitungen zu bestimmen sind. Daher konstruieren wir im Folgenden stetige Ansatzfunktionen, die die Dreiecke quadratisch interpolieren und auf intuitive Weise die Bestimmung der zweiten Ableitungen ermöglichen (siehe Abschnitt 5.2.3).

Die Konstruktion von Ansatzfunktionen mit höheren Glattheitsanforderungen, zum Beispiel stetig differenzierbare Ansatzfunktionen, erhöht den Rechen- und Implemen-



tationsaufwand erheblich (vergleiche Braess 1992, Seite 63ff.) und beinhaltet die Gefahr einer Überanpassung (*over fitting*), die zu Oszillationen der Lösung führen würde.



**Abbildung 5.1:** Knotenpunkte im Dreieck bei einem vollständig quadratischen Ansatz.

Ein elementweise vollständig quadratischer Ansatz

$$u^{(\Delta_e)}(x, y) = a_1^{(\Delta_e)} + a_2^{(\Delta_e)}x + a_3^{(\Delta_e)}y + a_4^{(\Delta_e)}x^2 + a_5^{(\Delta_e)}xy + a_6^{(\Delta_e)}y^2 \quad (5.15)$$

benötigt sechs Freiheitsgrade pro Dreieck. Hierzu legen wir, wie in Abbildung 5.1 für ein einzelnes Dreieck dargestellt wird, auf jeden Eckpunkt und jeden Seitenmittelpunkt der Gebietsunterteilung einen Knotenpunkt. Damit ist jeder Knotenpunkt auf einem Seitenmittelpunkt jeweils zwei und auf einem Eckpunkt im Mittel ungefähr sechs<sup>1</sup> Dreiecken gemein. Die Angabe der Höhenwerte in den sechs Knotenpunkten des Dreiecks  $\Delta_e$  bestimmt eindeutig die sechs Koeffizienten in (5.15).

Wenn wir nun jeden Knotenpunkt durchnummerieren und eine eindeutige Kennzahl  $k(P_i, \Delta_e)$  zuweisen, und gleichzeitig die Anzahl der Ansatzfunktion als gleich der Anzahl der Knotenpunkte festlegen, dann können wir den Höhenwert von Knotenpunkt  $k(P_i, \Delta_e)$  mit dem Wert des Koeffizienten  $c_{k=k(P_i, \Delta_e)}$  aus Ansatz (5.2) identifizieren und damit implizit die Ansatzfunktionen  $\varphi_{k=k(P_i, \Delta_e)}$  definieren.

Zur möglichst einfachen Lösung der Interpolationsaufgabe (5.15) transformieren wir

<sup>1</sup>Dies gilt in den Fällen, die uns interessieren, ohne Betrachtung des Randes der Triangulation. Eine ausführliche Diskussion hierzu kann man bei Edelsbrunner 1987 in Kapitel 6 finden. Vergleiche dazu auch Preparata und Shamos 1985, Seite 19.

## 5 Lösung der Diffusionsgleichung

das Dreieck  $\Delta_e$  durch

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \xi + (x_3 - x_1) \eta \quad (5.16)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \xi + (y_3 - y_1) \eta \quad (5.17)$$

in ein Einheitsdreieck (vergleiche Abbildung 5.1) und erhalten

$$u^{(\Delta_e)}(\xi, \eta) = \alpha_1^{(\Delta_e)} + \alpha_2^{(\Delta_e)} \xi + \alpha_3^{(\Delta_e)} \eta + \alpha_4^{(\Delta_e)} \xi^2 + \alpha_5^{(\Delta_e)} \xi \eta + \alpha_6^{(\Delta_e)} \eta^2. \quad (5.18)$$

Die Vorgabe der Höhenwerte in den Knotenpunkten des Dreiecks liefert uns dann die Bedingungen

$$\begin{aligned} c_{k(P_1, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} \\ c_{k(P_2, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} + \alpha_2^{(\Delta_e)} + \alpha_4^{(\Delta_e)} \\ c_{k(P_3, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} + \alpha_3^{(\Delta_e)} + \alpha_6^{(\Delta_e)} \\ c_{k(P_4, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} + 0.5\alpha_2^{(\Delta_e)} + 0.25\alpha_4^{(\Delta_e)} \\ c_{k(P_5, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} + 0.5\alpha_2^{(\Delta_e)} + 0.5\alpha_3^{(\Delta_e)} + 0.25\alpha_4^{(\Delta_e)} + 0.25\alpha_5^{(\Delta_e)} + 0.25\alpha_6^{(\Delta_e)} \\ c_{k(P_6, \Delta_e)} &= \alpha_1^{(\Delta_e)} + 0.5\alpha_3^{(\Delta_e)} + 0.25\alpha_6^{(\Delta_e)} \end{aligned}$$

deren Inversion mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \alpha^{(\Delta_e)} &= \left( \alpha_1^{(\Delta_e)}, \alpha_2^{(\Delta_e)}, \alpha_3^{(\Delta_e)}, \alpha_4^{(\Delta_e)}, \alpha_5^{(\Delta_e)}, \alpha_6^{(\Delta_e)} \right)^T \\ \mathbf{c}^{(\Delta_e)} &= \left( c_{k(P_1, \Delta_e)}, c_{k(P_2, \Delta_e)}, c_{k(P_3, \Delta_e)}, c_{k(P_4, \Delta_e)}, c_{k(P_5, \Delta_e)}, c_{k(P_6, \Delta_e)} \right)^T \end{aligned}$$

und der ganzzahligen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

die Lösung der Interpolationsaufgabe (5.18) für das Einheitsdreieck darstellt:

$$\alpha^{(\Delta_e)} = \mathbf{A} \mathbf{c}^{(\Delta_e)}. \quad (5.19)$$

Die Ansatzfunktionen  $\varphi_k$  kann man hieraus erhalten, wenn man jeweils  $c_k = 1$  und  $c_i = 0$  für alle  $i \neq k$  wählt und die Interpolationsaufgabe (5.15) für alle Dreiecke löst.

Diese explizite Darstellung der  $\varphi_k$  ist jedoch nicht notwendig, da die Beziehung (5.19) zur Berechnung der Elementbeiträge ausreicht, wie wir in Abschnitt 5.2.4 sehen werden.

### 5.2.3 Schätzung der zweiten Ableitungen

Der wesentliche Anteil der Bestimmung des Diffusionstensors entfällt auf die Ermittlung der Werte des krümmungsbasierten Strukturensors (4.4) (siehe auch Gleichung (2.7)). Dies sind die Werte der Hauptdiagonalelemente

$$\left( \left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) * g(\mathbf{x}, t)$$

und

$$\left( \left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial y \partial y} \right)^2 \right) * g(\mathbf{x}, t),$$

sowie der Wert der Nebendiagonalelemente

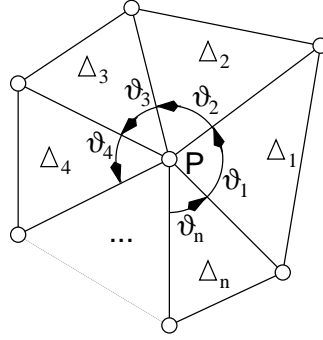
$$\left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial x} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial y} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial y \partial y} \right) * g(\mathbf{x}, t)$$

der symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrix. Zur Berechnung dieser Werte müssen Linearkombinationen der zweiten Ableitungen mit der Gaußfunktion gefaltet werden. Die Faltung mit der Gaußfunktion können wir analog zu dem in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehen durch Lösung der isotropen homogenen Diffusionsgleichung erhalten, wobei ein linearer Interpolationsansatz wie erwähnt ausreichend ist. Es liegt dabei nahe, die vorhandene Gebietsunterteilung zu übernehmen, so dass wir die zweiten Ableitungen von  $u(\mathbf{x}, t)$  in den Eckpunkten der Dreiecke zur Berechnung der Werte des krümmungsbasierten Strukturensors (4.4) benötigen.

Der quadratische Ansatz (5.15) führt zu einer Oberflächenbeschreibung mit stückweise konstanten zweiten Ableitungen, das heißt, innerhalb der Dreiecke sind die zweiten Ableitungen konstant und auf den Dreieckskanten, sowie den Eckpunkten treten Sprünge auf. Somit liefert die Oberflächenbeschreibung an den Eckpunkten nicht einen eindeutigen Wert der zweiten Ableitungen, sondern im Mittel sechs unterschiedliche Werte, einen für jedes der zum jeweiligen Eckpunkt zugehörigen Dreiecke.

Um eine Schätzung der zweiten Ableitungen in einem Eckpunkt zu erhalten, sind diese unterschiedlichen Werte geeignet gewichtet zu mitteln. Wir wählen als Gewicht eines Wertes der zweiten Ableitungen, wie in Abbildung 5.2 dargestellt wird, den Öffnungswinkel des zugehörigen Dreiecks zum betrachteten Eckpunkt  $P$  und erhalten damit die

## 5 Lösung der Diffusionsgleichung



**Abbildung 5.2:** Lokale Geometrie zur Schätzung der zweiten Ableitungen.

Schätzung:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial x} \right|_P &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial x \partial x}, \\ \left. \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial y} \right|_P &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial x \partial y}, \\ \left. \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial y \partial y} \right|_P &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial y \partial y}.\end{aligned}$$

Die innerhalb eines Dreiecks konstanten zweiten Ableitungen berechnen wir über die Transformation in ein Einheitsdreieck. Es gilt dann nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\mathbf{x}, y)}{\partial y \partial y} &= \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2 \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}.\end{aligned}$$

Durch partielle Differentiation von (5.18) erhalten wir

$$\frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \xi} = \alpha_4^{(\Delta_i)}, \quad \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \alpha_5^{(\Delta_i)}, \quad \frac{\partial u^{(\Delta_i)}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \eta} = \alpha_6^{(\Delta_i)},$$

wobei sich  $\alpha^{(\Delta_i)}$  durch Einsetzen der Koeffizienten  $\mathbf{c}^{(\Delta_i)}$  in Gleichung (5.19) ergibt.

Weiterhin erhalten wir durch partielle Differentiation der Transformationsgleichungen (5.16) und (5.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{y_3 - y_1}{J}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{y_1 - y_2}{J}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{x_1 - x_3}{J} & \text{und} & \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{J}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

die so genannte Jacobi-Determinante ist, deren Wert der zweifachen Fläche des entsprechenden Dreiecks entspricht.

### 5.2.4 Berechnung der Elementbeiträge

Die Berechnung der Elementbeiträge  $M_{jk}^{(\Delta_e)}$  und  $S_{jk}^{(\Delta_e)}$  durch explizite Bestimmung aller einzelnen Ansatzfunktionen und anschließender paarweiser Integration (siehe Gleichungen (5.13) und (5.14)) ist aufwändiger als notwendig. Für eine einfachere Berechnung können wir zweierlei Wissen ausnutzen. Erstens kennen wir innerhalb eines Dreiecks  $\Delta_e$  den Verlauf von  $u^{(\Delta_e)}(x, y)$  in Abhängigkeit von den Koeffizienten  $c_k$  und zweitens wissen wir, dass dieser Verlauf innerhalb eines Dreiecks  $\Delta_e$  für die Wahl  $c_k = 1$  und  $c_i = 0$  für alle  $i \neq k$  dem der Ansatzfunktion  $\varphi_k$  entspricht.

Zur Berechnung der Elementbeiträge der Massematrix betrachten wir das Integral von  $(u^{(\Delta_e)}(\xi, \eta))^2$  über das Einheitsdreieck. Da wir von der festen Geometrie des Einheitsdreiecks ausgehen, hängt der Wert dieses Integrals nur von den Interpolationskoeffizienten  $\alpha^{(\Delta_e)}$  ab. Wir erhalten die quadratische Form

$$\int_{\Delta} (u^{(\Delta_e)}(\xi, \eta))^2 d\xi d\eta = (\alpha^{(\Delta)})^T \tilde{\mathbf{M}}^{(\Delta)} \alpha^{(\Delta)},$$

wobei die Koeffizienten der Matrix  $\tilde{\mathbf{M}}^{(\Delta)}$  dem (bei Nebendiagonalelementen halben) Wert der einzelnen, nach den  $\alpha_i^{(\Delta_e)}$  sortierten Terme des Integrals entsprechen. Die Berechnung der einzelnen Terme kann nach der Gaußschen Integrationsformel erfolgen. Da wir einen quadratischen Ansatz gewählt haben, sind dabei Integrationspunkte der 2. Ordnung zu wählen (Zienkiewicz 1984, Seite 198 ff.). Mit  $dx dy = J d\xi d\eta$  und Bezie-

## 5 Lösung der Diffusionsgleichung

hung (5.19) erhalten wir das Integral über das allgemeine Dreieck  $\Delta_e$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} (u^{(\Delta_e)}(x, y))^2 dx dy &= J (\mathbf{c}^{(\Delta_e)})^T \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{M}}^{(\Delta)} \mathbf{A} \mathbf{c}^{(\Delta_e)} \\ &= J (\mathbf{c}^{(\Delta_e)})^T \mathbf{M}^{(\Delta)} \mathbf{c}^{(\Delta_e)}, \end{aligned}$$

wobei die Matrix

$$\mathbf{M}^{(\Delta)} = \frac{1}{360} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

*Massenelementmatrix* heißt und nur vom gewählten Interpolationsansatz abhängig ist.

Ansatzfunktionen, deren zugehörige Koeffizienten nicht Knotenpunkten zugeordnet sind, die zum betrachteten Dreieckselement gehören, tragen nicht zum Beitrag des betrachteten Dreieckselements bei. Für die Berechnung eines Massenelementbeitrags benötigen wir daher nur die einmal berechnete Massenelementmatrix und können für jedes Tupel von Ansatzfunktionen, die jeweils beide über ihre Koeffizienten dem betrachteten Dreieckselement zugeordnet sind, den Elementbeitrag aus der entsprechenden Zeile und Spalte der Massenelementmatrix, multipliziert mit der entsprechenden Jacobi-Determinante des betrachteten Dreieckselements, ablesen.

Durch analoges Vorgehen erhalten wir

$$\int_{\Delta_e} \mathbf{D}(x, y) \nabla u^{(\Delta_e)}(x, y) \cdot \nabla u^{(\Delta_e)}(x, y) dx dy = J (\mathbf{c}^{(\Delta_e)})^T \mathbf{S}^{(\Delta_e)} \mathbf{c}^{(\Delta_e)},$$

wobei die *Steifigkeitselementmatrix*  $\mathbf{S}^{(\Delta_e)}$  durch die Ortsabhängigkeit des Diffusionstensors für jedes Dreieckselement einzeln, zum Beispiel durch Anwendung des Gaußschen Integrationsformel 2. Ordnung, berechnet werden muss. Die Elementbeiträge zur Steifigkeitsmatrix ergeben sich das gleiche Vorgehen wie zur Bestimmung der Elementbeiträge der Massematrix.

In beiden Fällen führt dies, wie verlangt, zu einer jeweils dünn besetzten Masse- und Steifigkeitsmatrix. Damit wird die getroffene Wahl der Ansatzfunktionen in dieser Hinsicht bestätigt.

## 6 Beispiele

Wir stellen in diesem Kapitel Anwendungsbeispiele vor, die die Eigenschaften der in dieser Arbeit entwickelten Methoden in Hinblick auf die geometrische Generalisierung veranschaulichen. Damit zeigen wir, dass die Zusammenstellung dieser Methoden ein Werkzeug darstellt, mit dem die geometrische Generalisierung eines DHM nach den Wünschen eines Anwenders durchgeführt werden kann.

Unsere Testdaten repräsentieren DHM jeweils durch eine Menge von Stützpunkten, daher führen wir vor Anwendung der Diffusionsgleichung (4.7), wie in Kapitel 2 beschrieben, eine Rekonstruktion der Oberfläche durch. Wir wählen als Rekonstruktionsmethode die Faltung mit einer Gaußfunktion mit Varianz  $\sigma^2 = (0.7a)^2$ , wobei  $a$  der Abstand der jeweiligen Abtastung ist. Da Diffusionsgleichung (4.7) einen skaleninvarianten Skalenraum beschreibt, können wir zur Vereinfachung der Berechnungen  $a = 1$  setzen und anschließend die Ergebnisse (insbesondere den Skalenparameter) auf das korrekte Maß reskalieren.

Wir realisieren die Faltung mit einer Gaußfunktion mit Varianz  $\sigma^2 = (0.7)^2$  durch Lösung der homogenen und isotropen ( $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ ) Diffusionsgleichung mit  $t_{\text{start}} = 0$  und  $t_{\text{stop}} = \frac{1}{2}(0.7)^2$  (vergleiche Kapitel 3.2). Als Ergebnis erhalten wir die differenzierbare Funktion  $u\left(\mathbf{x}, t = \frac{1}{2}(0.7)^2\right)$ , die die Anfangsbedingung für die Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) darstellt. Die Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) schließen wir mit  $t_{\text{start}} = \frac{1}{2}(0.7)^2$  direkt an die Rekonstruktion an. Damit erhalten wir einen Diffusionsprozess nach dem allgemeinen Modell (4.3), der für  $t \leq \frac{1}{2}(0.7)^2$  mit  $\mathbf{D} = \mathbf{I}$  das DHM rekonstruiert und für  $t > \frac{1}{2}(0.7)^2$  mit dem Diffusionstensor (4.6) das DHM geometrisch generalisiert. Da sich die geometrische Generalisierung mit Diffusionsgleichung (4.7) am Gaußschen Skalenraum (mit  $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ ) orientiert, ist dies zunächst der einfachste Übergang zwischen Rekonstruktion und geometrischer Generalisierung.

Zur Darstellung des Verlaufs der geometrischen Generalisierung zeigen wir jeweils eine sukzessive Folge von Ergebnissen zu unterschiedlichen Werten des Diffusionsparameters. Die Abstände der Werte des Diffusionsparameters wählen wir dabei auf einem logarithmischen Maßstab konstant, da bei der geometrischen Generalisierung der

## 6 Beispiele

$\sigma$	0.7	0.9	1.15	1.5	<u>1.95</u>	2.5	3.2	<u>4.1</u>	5.25	6.75	<u>8.65</u>	11.1	14.25	<u>18.3</u>
$\log t$	-1.41	-0.9	-0.41	0.12	<u>0.64</u>	1.14	1.63	<u>2.13</u>	2.62	3.13	<u>3.62</u>	4.12	4.62	<u>5.12</u>

**Tabelle 6.1:** Logarithmus des Diffusionsparameters und entsprechender Skalenparameter für die jeweils dargestellten Generalisierungsstufen für  $\alpha = 1$ . Unterstrichen sind die Skalenparameter, die Generalisierungsstufen entsprechen, anhand derer das vorgestellte Verfahren zur geometrischen Generalisierung mit der Gaußschen Diffusion verglichen wird. In den Beispielen wird der Skalenparameter reskaliert, das heißt multipliziert mit dem Abstand der Abtastung  $\alpha$  (dieser entspricht in den vorgestellten Fällen immer der Rasterweite), angegeben.

Grad der Veränderung durch den relativen Skalenunterschied zwischen zwei Generalisierungsstufen bestimmt sein sollte. In Tabelle 6.1 ist für  $\alpha = 1$  der Logarithmus des Diffusionsparameters  $\log t$  zusammen mit dem entsprechenden Skalenparameter  $\sigma$  für die jeweils dargestellten Generalisierungsstufen aufgelistet.

Die Berechnung der vorgestellten Beispiele benötigte auf einer Workstation vom Typ SUN Ultra 2 mit zwei mit 167 MHz getakteten Prozessoren und 256 MB Hauptspeicher bis zu 8 Stunden Rechenzeit pro Lauf. In einem Lauf werden für einen vorgegebenen Eingangsdatensatz die Ergebnisse der geometrischen Generalisierung mit vorgegebenen Prozessparametern ( $\alpha_P$ ,  $\alpha_A$  und  $k$ ) für die in Tabelle 6.1 angegebene Folge von Skalenwerten berechnet.

### 6.1 Geometrische Generalisierung Digitaler Höhenmodelle

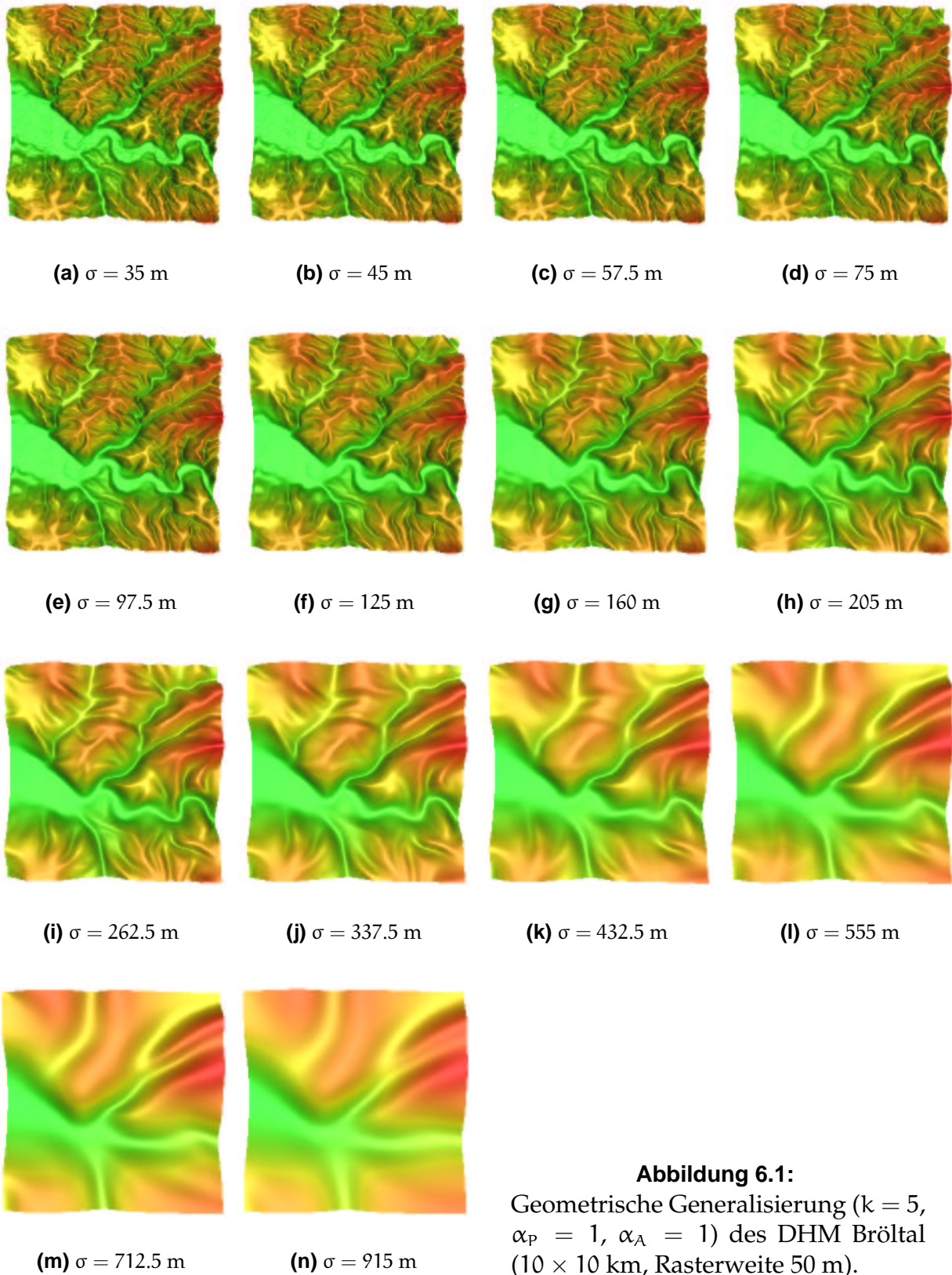
Es gilt zuerst plausibel zu machen, dass im durch Anwendung von Diffusionsgleichung (4.7) geometrisch generalisierten DHM die Oberflächenform des Geländes der gewählten Skala entsprechend zutreffend erkennbar gemacht wird, beziehungsweise dass wir in dieser Hinsicht gegenüber der Gaußschen Diffusion eine Verbesserung erzielt haben. Wir beginnen unsere Darstellung von Beispielen daher mit DHM von realen Geländeoberflächen. Als Testbeispiele haben wir uns folgende zwei Ausschnitte des DHM (DGM25) des Landesvermessungsamtes NRW ausgesucht:

**DHM Bröltal:** 50 m Raster,  $201 \times 201$  Rasterpunkte, Gauß-Krüger Koordinaten (Rechts- / Hochwert): von 2 588 000 m / 5 624 000 m bis 2 598 000 m / 5 634 000 m

**DHM Siebengebirge:** 50 m Raster,  $201 \times 201$  Rasterpunkte, Gauß-Krüger Koordinaten (Rechts- / Hochwert): von 2 581 500 m / 5 610 500 m bis 2 591 500 m / 5 620 500 m

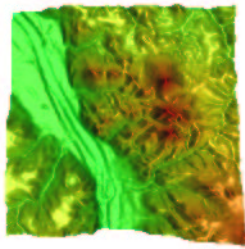


## 6.1 Geometrische Generalisierung Digitaler Höhenmodelle

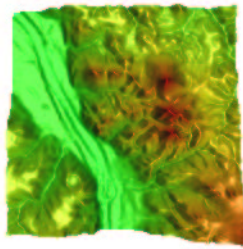


**Abbildung 6.1:**  
Geometrische Generalisierung ( $k = 5$ ,  
 $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_\lambda = 1$ ) des DHM Bröltal  
( $10 \times 10$  km, Rasterweite 50 m).

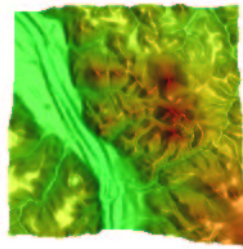
## 6 Beispiele



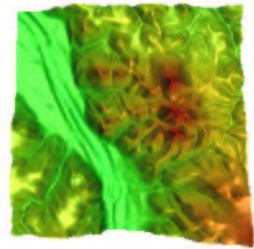
**(a)**  $\sigma = 35$  m



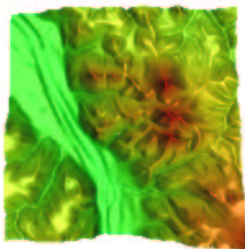
**(b)**  $\sigma = 45$  m



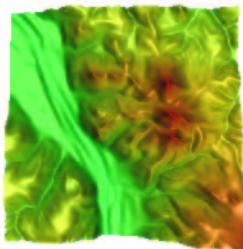
**(c)**  $\sigma = 57.5$  m



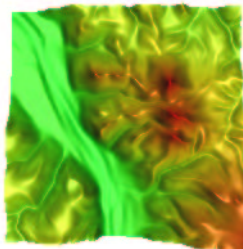
**(d)**  $\sigma = 75$  m



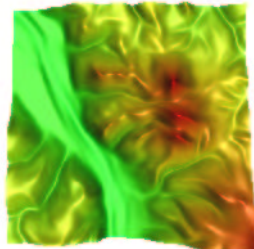
**(e)**  $\sigma = 97.5$  m



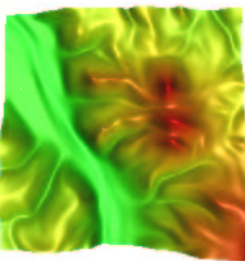
**(f)**  $\sigma = 125$  m



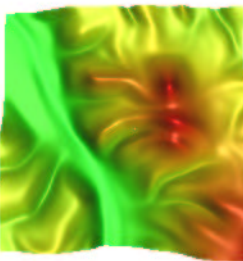
**(g)**  $\sigma = 160$  m



**(h)**  $\sigma = 205$  m



**(i)**  $\sigma = 262.5$  m



**(j)**  $\sigma = 337.5$  m



**(k)**  $\sigma = 432.5$  m



**(l)**  $\sigma = 555$  m



**(m)**  $\sigma = 712.5$  m



**(n)**  $\sigma = 915$  m

**Abbildung 6.2:**  
Geometrische Generalisierung ( $k = 5$ ,  
 $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_\lambda = 1$ ) des DHM Siebenge-  
birge ( $10 \times 10$  km, Rasterweite 50 m).

### 6.1.1 Visueller Vergleich der Generalisierungsergebnisse

Beide DHM stellen fluvial geprägtes Gelände dar, wobei das DHM Bröltal visuell von linienartigen Strukturen dominiert wird und im DHM Siebengebirge punktartige Strukturen visuell hervortreten. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen das Ergebnis einer geometrischen Generalisierung dieser beiden DHM. Zur Durchführung der geometrischen Generalisierung haben wir die Diffusionsgleichung (4.7) mit der Parameterwahl  $k = 5$ ,  $\alpha_p = 1$  und  $\alpha_A = 1$  für die in Tabelle 6.1 angegebenen Werte des Skalenparameters (unter Berücksichtigung der Rasterweite) gelöst. Die mit dem Skalenparameter zunehmende Vereinfachung der Geländeoberflächen ist in beiden genannten Abbildungen deutlich zu beobachten, das heißt, unsere Implementation der Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) vereinfacht tatsächlich und erfüllt damit die Grundvoraussetzung der Eignung eines Werkzeugs zur Generalisierung.

In Kapitel 4.3.1 hatten wir festgestellt, dass eine Diffusionsgleichung zur geometrischen Generalisierung sich sehr ähnlich der Gaußschen Diffusion verhalten muss, wenn man den für den Gaußschen Skalenraum definierten Skalenbegriff nutzen möchte und die Forderung nach ausreichender geometrischer Exaktheit (F1) im Sinne der Mittelwerterhaltung des Gaußschen Skalenraums definiert. Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen eine Gegenüberstellung der Ergebnisse von geometrischer Generalisierung (Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) mit den Parametern  $k = 5$ ,  $\alpha_p = 1$  und  $\alpha_A = 1$ ) und Gaußscher Diffusion (diese entspricht nach Konstruktion der Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) mit den Parametern  $\alpha_p = 0$  und  $\alpha_A = 0$ ) für eine Auswahl von Skalenstufen. Dieser visuelle Vergleich zeigt ein ähnliches Glättungsverhalten beider Verfahren, wobei die geometrische Generalisierung durch Lösung der Diffusionsgleichung (4.7) die charakteristischen Formen der beiden Geländeoberflächen deutlich schärfer hervortreten lässt als die Gaußsche Diffusion.

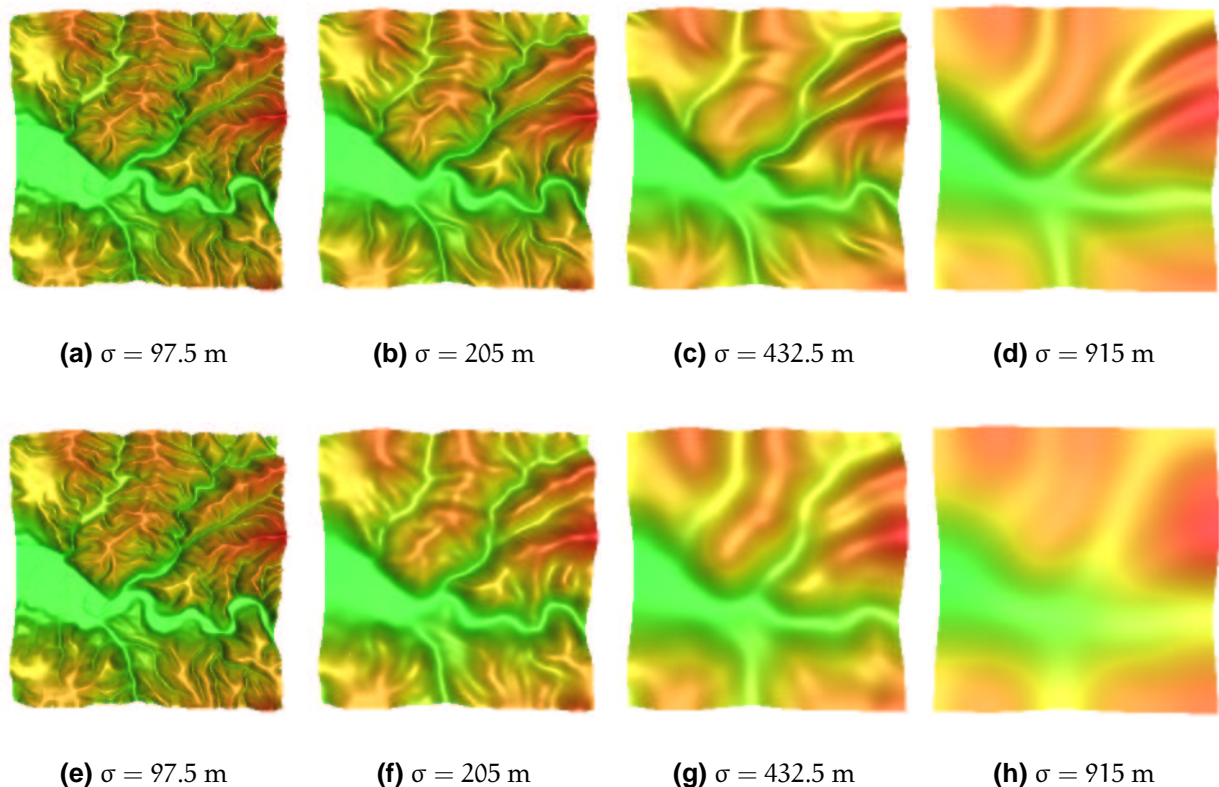
### 6.1.2 Vergleich der Krümmungsverteilungen

Für einen weiteren Vergleich des Glättungsverhaltens beider Verfahren, betrachten wir die Auswirkungen beider Verfahren auf das Krümmungsverhalten der DHM, das wir hierzu durch die Verteilung der Spur der Hessematrix (Laplace-Operator) charakterisieren. Die Spur der Hessematrix ist ein kontinuierliches, rotationsinvariantes, skalares Maß für die Krümmung einer Oberfläche, das durch Unterscheidung von positiver und negativer Krümmung, ein unterschiedliches Auftreten von Rinnen und Graten beziehungsweise von Kuppen und Kuhlen im DHM berücksichtigt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Krümmungen haben wir nach dem  $k_n$ -nearest-neighbor Verfahren (Duda und Hart 1973, Seite 95 ff.) geschätzt und in den



## 6 Beispiele



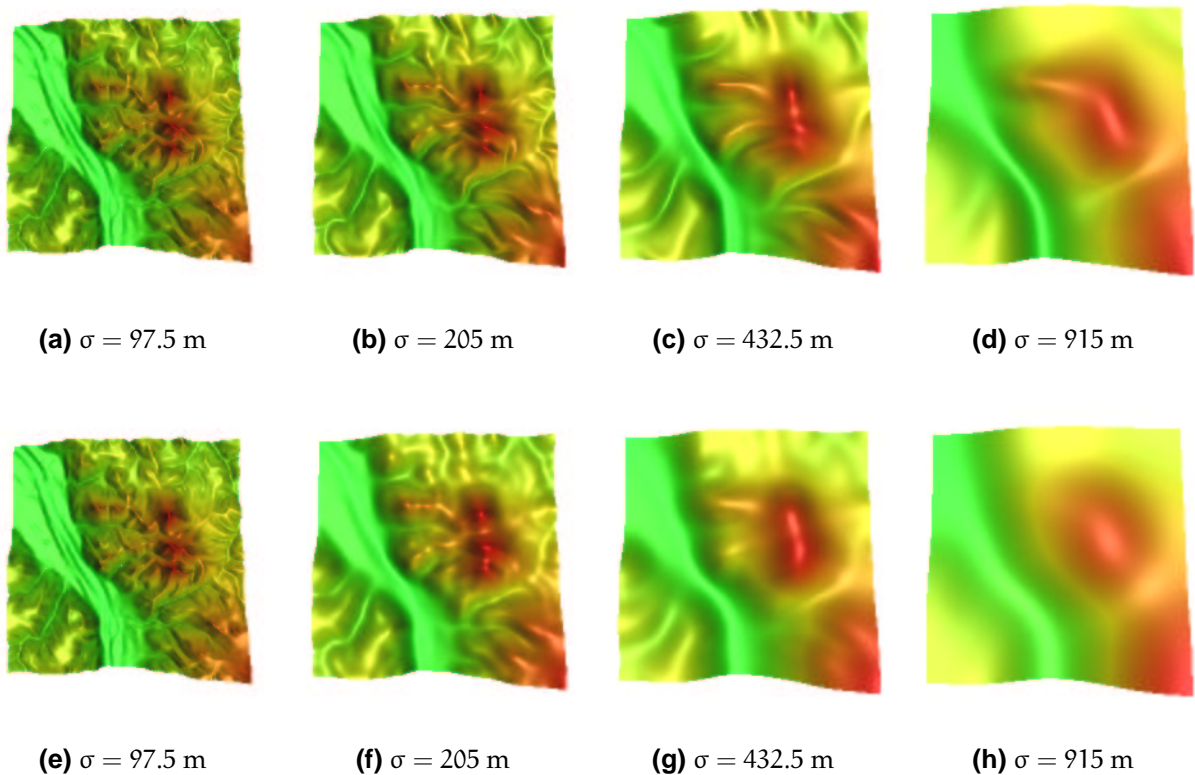
**Abbildung 6.3:** Vergleich zwischen geometrischer Generalisierung mit den Parametern  $k = 5$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_A = 1$  (obere Reihe, Bilder **(a)** – **(d)**) und Gaußscher Diffusion (untere Reihe, Bilder **(e)** – **(h)**) des DHM Bröltal.

Abbildungen 6.5 und 6.6 für eine Auswahl von Skalenstufen dargestellt. Dort ist zu sehen, dass die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung durch beide Verfahren in ähnlicher Weise beeinflusst wird (es ist dabei zu beachten, dass der Wertebereich der Diagramme von Skalenstufe zu Skalenstufe jeweils halbiert wurde).

Wie zu erwarten, weisen die der Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) zugeordneten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen höhere Werte für hohe Krümmungen auf als die jeweils entsprechenden der Lösung der Gaußschen Diffusionsgleichung. So spiegelt sich in der Wahrscheinlichkeitsdichte der DHM-Krümmungen die angezielte Erhaltung von scharfen Krümmungsstrukturen bei der Modellierung von Diffusionsgleichung (4.7) wider.

Diese Erhaltung von scharfen Krümmungsstrukturen spiegelt sich ebenfalls wider, wenn wir die generalisierten Geländeoberflächen lokal nach ihrem Krümmungsverhalten klassifizieren. Hierzu nutzen wir die in Kapitel 1 vorgestellte Unterteilung einer Geländeoberfläche in Form-Elemente nach Dikau (1988). Wie bei Dikau beschrieben, wäh-

## 6.1 Geometrische Generalisierung Digitaler Höhenmodelle



**Abbildung 6.4:** Vergleich zwischen geometrischer Generalisierung mit den Parametern  $k = 5$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_A = 1$  (obere Reihe, Bilder (a) – (d)) und Gaußscher Diffusion (untere Reihe, Bilder (e) – (h)) des DHM Siebengebirge.

len wir hierzu je einen Schwellwert für den Betrag der Horizontal- und der Vertikalkomponente der Oberflächennormalenkrümmung, der diese nach konkav/konvex oder gerade/gestreckt unterscheidet und erhalten damit insgesamt neun Form-Element-Klassen. Im Gegensatz zu Dikau (1988), der beide Schwellwerte auf Grund geomorphometrischer Überlegungen wählt, wählen wir die beiden Schwellwerte für jedes DHM so, dass alle Form-Element-Klassen möglichst jeweils den gleichen Flächeninhalt belegen, um einen möglichst aussagekräftigen visuellen Eindruck zu erhalten, der die unterschiedlichen Eigenschaften von Diffusionsgleichung (4.7) und der Gaußschen Diffusion zu beurteilen hilft. Die Skalenabhängigkeit der so für jedes Klassifikationsbild individuell bestimmten Schwellwerte haben wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht untersucht. In diesem Zusammenhang könnte es für Geomorphologen interessant sein zu untersuchen, wie die Schwellwerte von der Skala und insbesondere auch vom untersuchten Geländetyp abhängen.

In den Abbildungen 6.7 und 6.8 ist diese gerade beschriebene Klassifikation der DHM

## 6 Beispiele

Bröltal und Siebengebirge für eine Auswahl von Skalenstufen zu sehen. Es ist dort zu erkennen, dass die Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) schärfere Klassifikationsstrukturen aufweist, die sich zudem besser über den Verlauf der Skalenstufen zuordnen lassen, als die Klassifikationsstrukturen der Lösung der Gaußschen Diffusionsgleichung. Vom visuellen Eindruck her könnte man sagen, dass die Klassifikationsstrukturen der Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) mit wachsender Skala nicht so "auseinanderfallen" wie die der Lösung der Gaußschen Diffusionsgleichung.

Dieser Eindruck herrscht insbesondere in DHM-Bereichen, die Tiefenlinien der Geländeoberfläche zuzuordnen sind. Es lässt sich daher vermuten, dass die Information über die für hydrologische Fragestellungen bedeutsamen Fließwege der Geländeoberfläche im DHM durch die Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) zu geringeren Teilen entfernt wird als durch die Lösung der Gaußschen Diffusionsgleichung, die die Verallgemeinerung der herkömmlichen Berechnung einer Bildpyramide darstellt. Diese Vermutung ist erst durch weitere Untersuchungen, die in den Bereich der Hydrologie fallen und daher den Umfang der vorliegenden Arbeit sprengen würden, zu erhärten. Die explizite Generalisierung der Fließwege erfordert eine begriffliche Generalisierung, die wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit bewusst nicht behandeln (siehe Kapitel 1).

### 6.1.3 Geschätzter geometrischer Informationsgehalt

Wie in Kapitel 4.4 beschrieben, kann über die Krümmung (Laplace-Operator) die differentielle Entropie als Schätzung des geometrischen Informationsgehalts eines DHM bestimmt werden. In Abbildungen 6.9a und 6.10a ist die differentielle Entropie der DHM Bröltal und Siebengebirge für unterschiedliche Parametereinstellungen über den betrachteten Skalenbereich (vergleiche Tabelle 6.1) dargestellt.

Wir sehen, dass der geschätzte geometrische Informationsgehalt wie erwartet (vergleiche Kapitel 4.4) mit wachsendem Skalenparameter abnimmt. Die Kurven für  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  größer als Null liegen jeweils oberhalb derjenigen Kurve, die der Gaußschen Diffusion zuzuweisen ist. Das heißt, dass der Informationsverlust geringer wird und Diffusionsgleichung (4.7) gegenüber der Gaußschen Diffusion informationserhaltend ist, wenn wir  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  größer als Null wählen.

Zu Beginn der geometrischen Generalisierung weist der Verlauf des geschätzten geometrischen Informationsgehalts eine Besonderheit auf, die besonders deutlich zu beobachten ist, wenn wir seine erste Ableitung betrachten (Abbildungen 6.9b und 6.10b). Wenn  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  größer als Null gewählt werden, ist der Informationsverlust bei den ersten Generalisierungsschritten größer als bei der Gaußschen Diffusion um dann bei den nächsten Generalisierungsschritten deutlich abzufallen („Beule“ im Ableitungsgraphen für kleine  $\log t$ ).

## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle

Eine Erklärung für dieses Verhalten könnte der Modellübergang zwischen Rekonstruktion und geometrischer Generalisierung sein. Die Rekonstruktion erfolgt auf Grund eines isotropen und homogenen Oberflächenmodells, während die geometrische Generalisierung einem anisotropen und inhomogenen Oberflächenmodell zu Grunde liegt. So sind nach der Rekonstruktion Informationen im DHM enthalten, die nicht dem Oberflächenmodell der geometrischen Generalisierung entsprechen. Aus dem Verlauf des geschätzten geometrischen Informationsgehalts für kleine  $\log t$  ist zu folgern, dass die geometrische Generalisierung in den ersten Schritten die nicht generalisierungsmodellkonformen Informationen aus dem DHM entfernt und danach im Wesentlichen eine geometrische Umformung des DHM vornimmt, so dass das DHM dem bei der geometrischen Generalisierung verwendeten Oberflächenmodell entspricht.

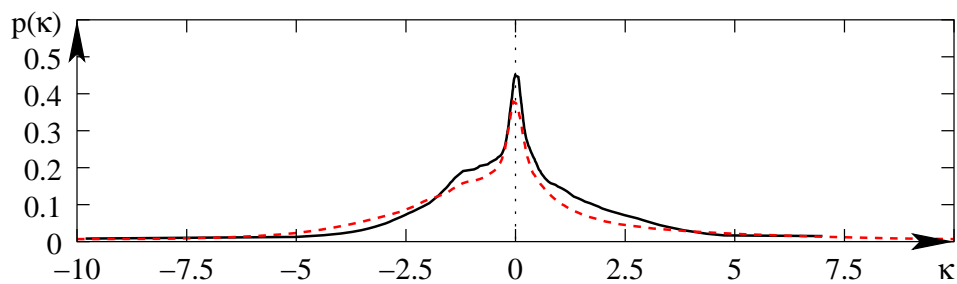
Für Werte des Skalenparameters oberhalb von circa  $\sigma \simeq 400$  m ( $\log t \simeq 3,5$ ) weist der differenzierte Verlauf des geschätzten geometrischen Informationsgehalts deutliche Schwankungen auf. Es ist nicht klar, wie aussagekräftig diese Schwankungen sind, da die in die Berechnung einfließenden Krümmungen im Sinne der Rechengenauigkeit klein sind, die Implementation mit finiten Elementen nur eine Näherungslösung liefert und die Berechnung der entsprechenden Kurven eine dreifache Differentiation beinhaltet, die Fehlereinflüsse verstärkt. Da wir in diesem Zusammenhang keine aussagekräftige Fehlerabschätzung durchgeführt haben, werden wir nicht weiter auf diese Schwankungen eingehen.

Im Allgemeinen ist zu sehen, dass die Parametereinstellung  $\alpha_P = 0$  und  $\alpha_A = 0$ , bei der die Diffusionsgleichung (4.7) der Gaußschen Diffusionsgleichung entspricht, im Verlauf der geometrischen Generalisierung nach den ersten Generalisierungsschritten den geringsten geometrischen Informationsgehalt aufweist, das heißt, die Parameter  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  können als Regler interpretiert werden, deren höhere Einstellung eine Informationserhaltung im Verlauf der Generalisierung bewirken. Die Unterschiede in der Wirkung beider Parameter werden wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

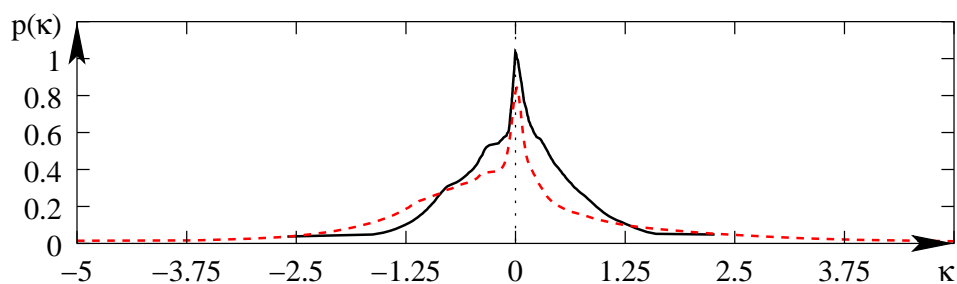
## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle

Im Folgenden wollen wir die unterschiedlichen Auswirkungen der Einstellung der beiden Parameter  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  genauer untersuchen. Dazu betrachten wir prototypische Oberflächenformen in einem künstlich erzeugten DHM unter dem Einfluss der geometrischen Generalisierungsoperation bei unterschiedlichen Parametereinstellungen.

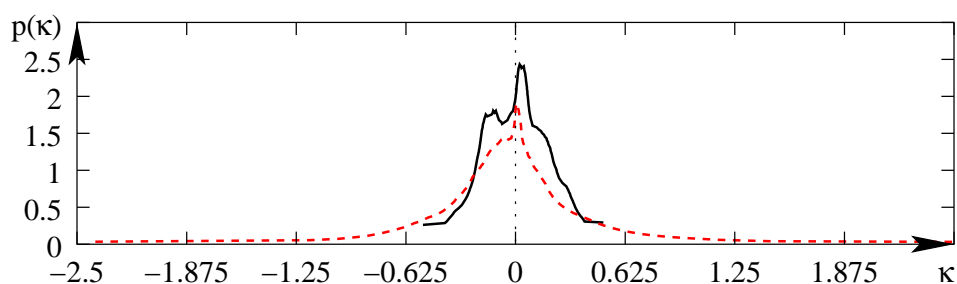
## 6 Beispiele



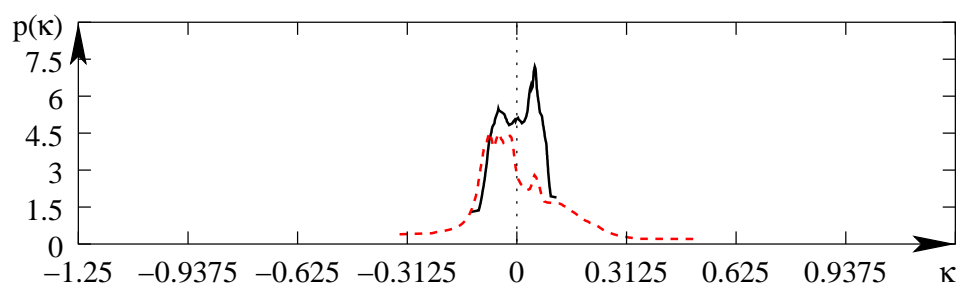
(a)  $\sigma = 97.5$  m



(b)  $\sigma = 205$  m



(c)  $\sigma = 432.5$  m

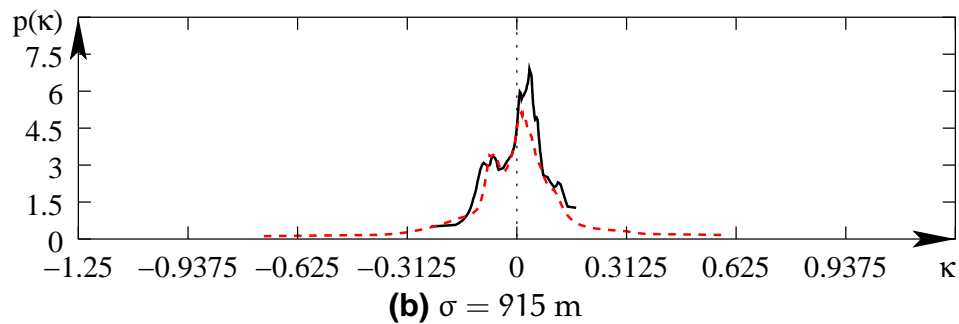
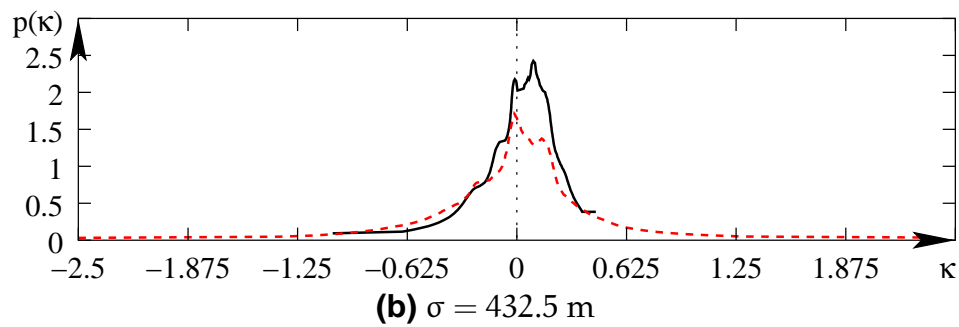
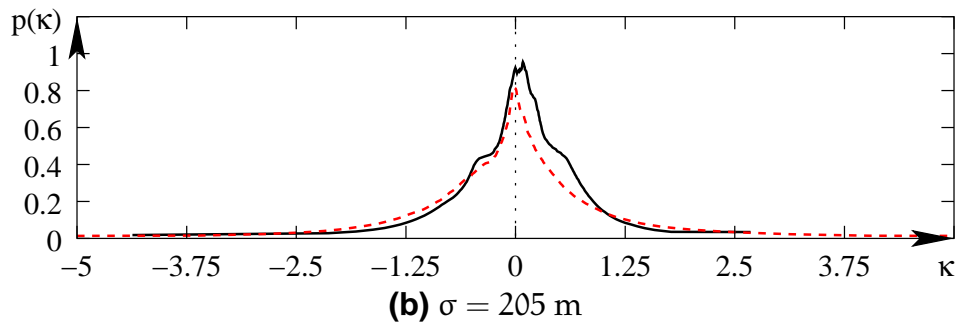
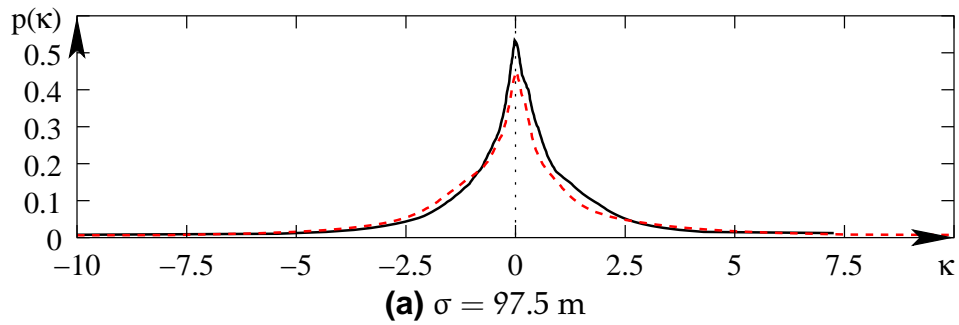


(d)  $\sigma = 915$  m

**Abbildung 6.5:** Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Krümmung (gemessen durch die Spur der Hessematrix (Laplace-Operator)  $u_{xx} + u_{yy}$  in Einheiten der Rasterweite) des DHM Bröltal für eine Auswahl von Skalenstufen, nach geometrischer Generalisierung durch Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) mit den Parametern  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 1$  (rote gestrichelte Linien) und Gaußscher Diffusion (schwarze durchgezogene Linien). Zur besseren Lesbarkeit ist der Wertebereich der Diagramme von Skalenstufe zu Skalenstufe jeweils halbiert worden.

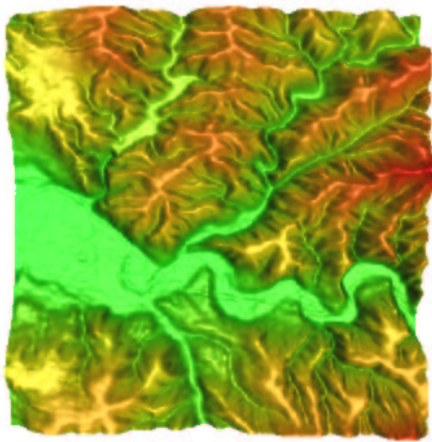


## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle



**Abbildung 6.6:** Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Krümmung (gemessen durch die Spur der Hessematrix (Laplace-Operator)  $u_{xx} + u_{yy}$  in Einheiten der Rasterweite) des DHM Siebengebirge für eine Auswahl von Skalenstufen, nach geometrischer Generalisierung durch Lösung von Diffusionsgleichung (4.7) mit den Parametern  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 1$  (rote gestrichelte Linien) und Gaußscher Diffusion (schwarze durchgezogene Linien). Zur besseren Lesbarkeit ist der Wertebereich der Diagramme von Skalenstufe zu Skalenstufe jeweils halbiert worden.

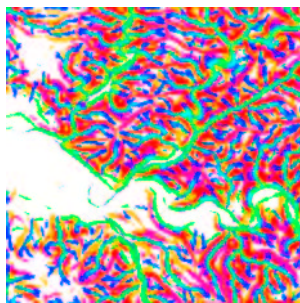
## 6 Beispiele



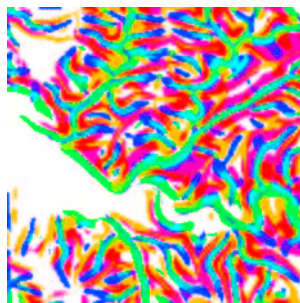
(a) DHM Bröltal

		Vertikalwölbung		
		konvex	gestreckt	konkav
Horizontalwölbung	konvex			
	gerade			
	konkav			

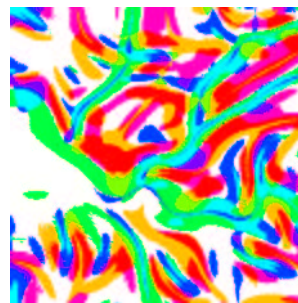
(b) Farbkodierung der Krümmungsklassen der Klassifikation nach Dikau.



(c)  $\sigma = 97.5$  m



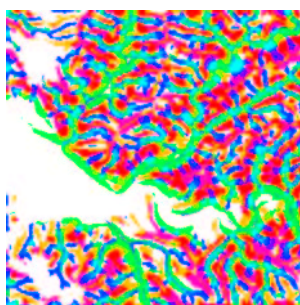
(d)  $\sigma = 205$  m



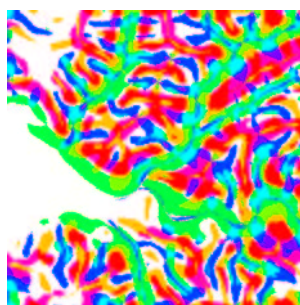
(e)  $\sigma = 432.5$  m



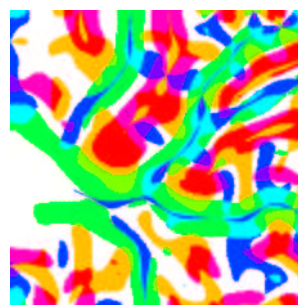
(f)  $\sigma = 915$  m



(g)  $\sigma = 97.5$  m



(h)  $\sigma = 205$  m



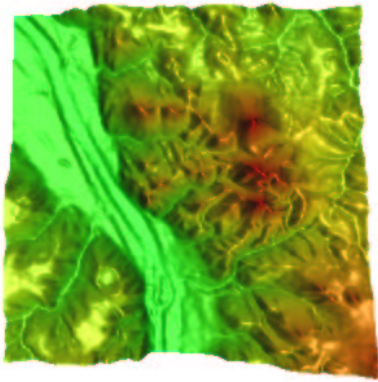
(i)  $\sigma = 432.5$  m



(j)  $\sigma = 915$  m

**Abbildung 6.7:** Krümmungsklassifikation des DHM Bröltal nach Dikau (1988). Die Klassifikation wurde für unterschiedliche Generalisierungsstufen jeweils auf Grundlage der geometrischen Generalisierung (Bilder (c) bis (f)) und der Gaußschen Diffusion (Bilder (g) bis (j)) berechnet.

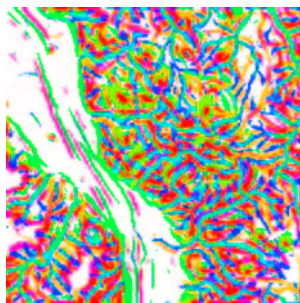
## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle



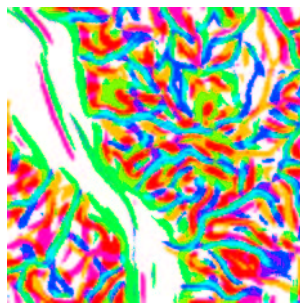
(a) DHM Siebengebirge

		Vertikalwölbung		
		konvex	gestreckt	konkav
Horizontalwölbung	konvex			
	gerade			
	konkav			

(b) Farbkodierung der Krümmungsklassen der Klassifikation nach Dikau.



(c)  $\sigma = 97.5$  m



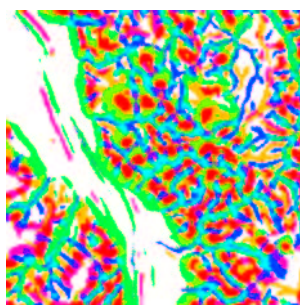
(d)  $\sigma = 205$  m



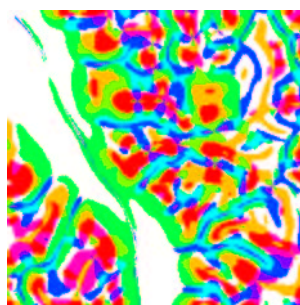
(e)  $\sigma = 432.5$  m



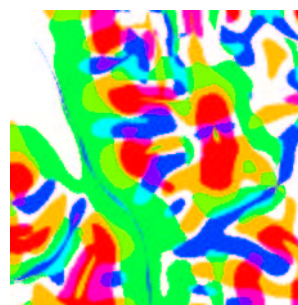
(f)  $\sigma = 915$  m



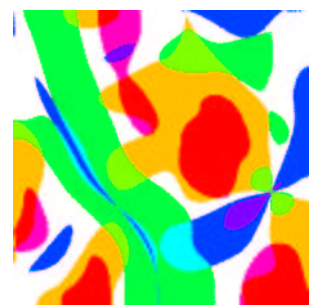
(g)  $\sigma = 97.5$  m



(h)  $\sigma = 205$  m



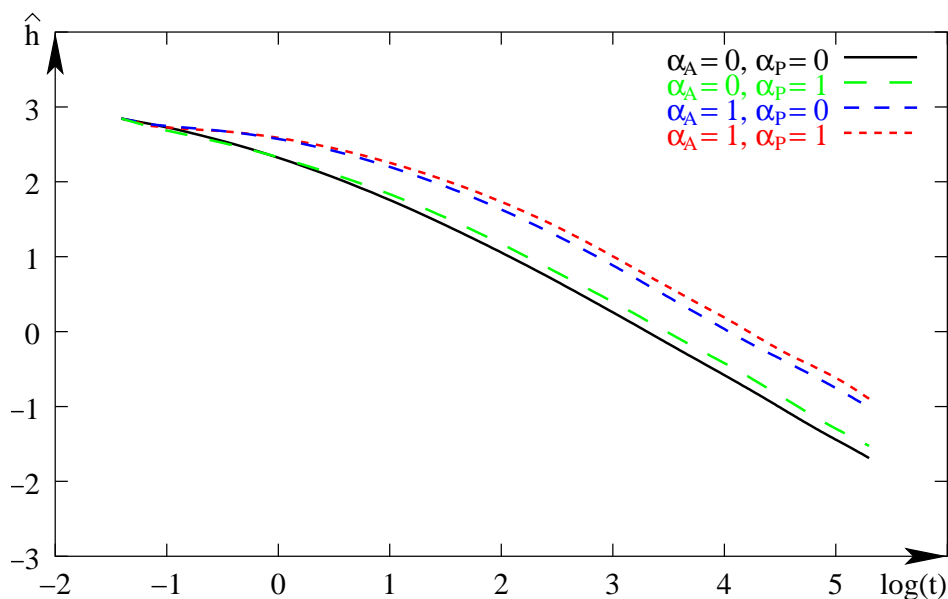
(i)  $\sigma = 432.5$  m



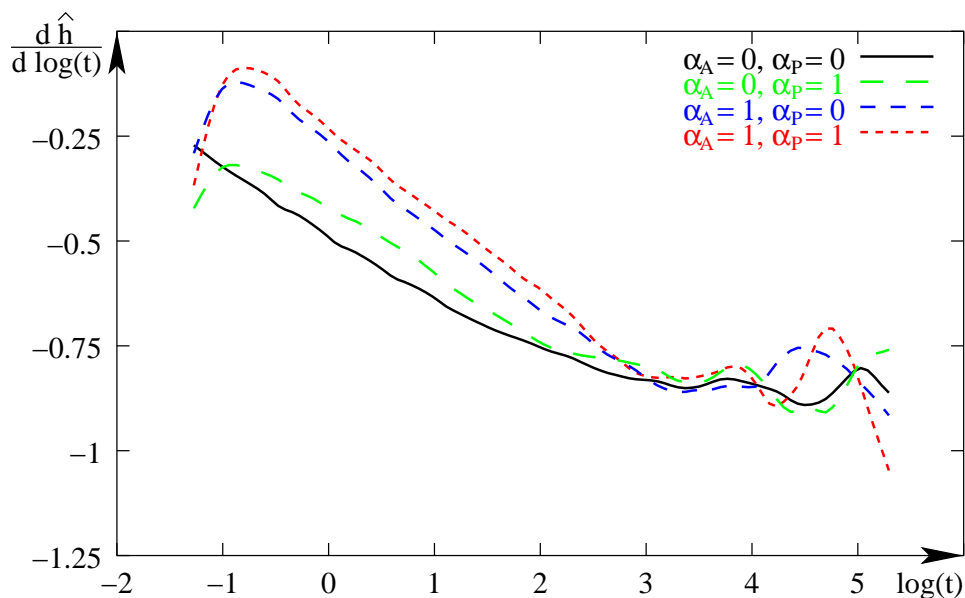
(j)  $\sigma = 915$  m

**Abbildung 6.8:** Krümmungsklassifikation des DHM Siebengebirge nach Dikau (1988). Die Klassifikation wurde für unterschiedliche Generalisierungsstufen jeweils auf Grundlage der geometrischen Generalisierung (Bilder (c) bis (f)) und der Gaußschen Diffusion (Bilder (g) bis (j)) berechnet.

## 6 Beispiele



(a) Entropien Bröltal

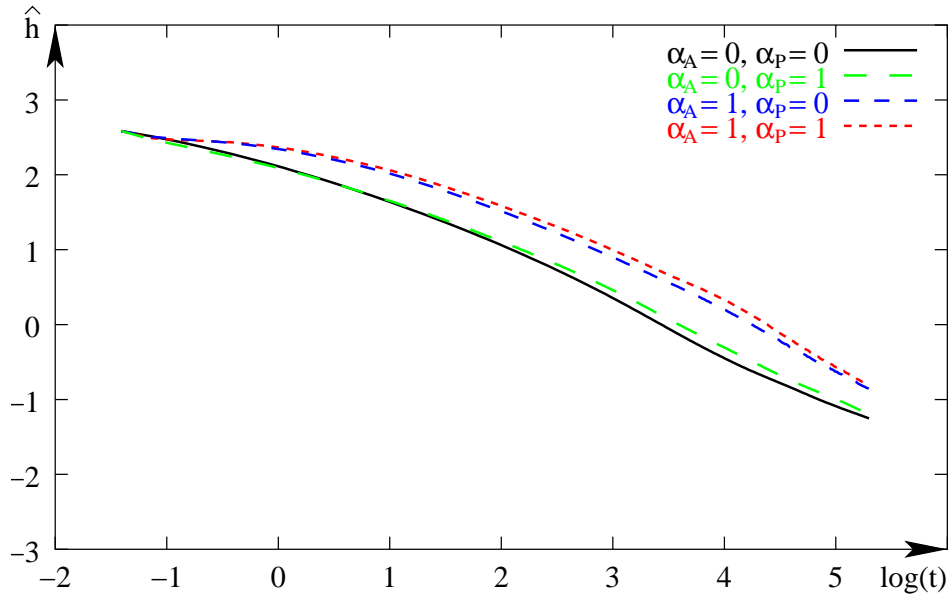


(b) Differenzierte Entropien Bröltal

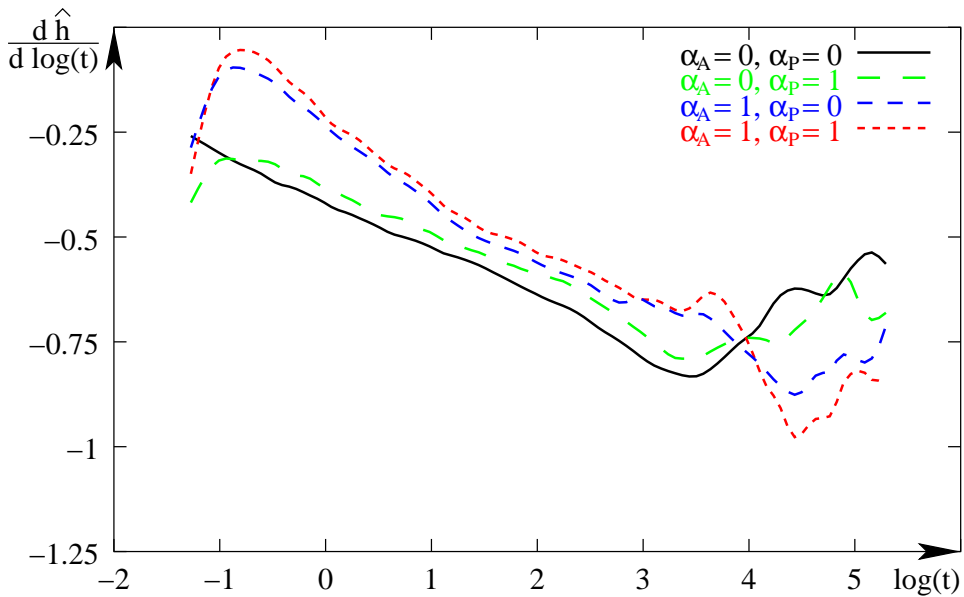
**Abbildung 6.9:** *Oben:* Verlauf der Entropie des DHM Bröltal für unterschiedliche Parametereinstellungen der geometrischen Generalisierung in Abhängigkeit vom Logarithmus des Diffusionsparameters. *Unten:* Verlauf der nach dem Logarithmus des Diffusionsparameters differenzierten Entropien des DHM Bröltal. *Parametereinstellungen:* Schwarze Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 0$  (in dieser Einstellung entspricht die geometrische Generalisierung der Gaußschen Diffusion), Grüne Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 0$ , Blaue Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 1$ , Rote Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 1$ .



## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle



(a) Entropien Siebengebirge



(b) Differenzierte Entropien Siebengebirge

**Abbildung 6.10:** *Oben:* Verlauf der Entropie des DHM Siebengebirge für unterschiedliche Parametereinstellungen der geometrischen Generalisierung in Abhängigkeit vom Logarithmus des Diffusionsparameters. *Unten:* Verlauf der nach dem Logarithmus des Diffusionsparameters differenzierten Entropien des DHM Siebengebirge. *Parametereinstellungen:* Schwarze Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 0$  (in dieser Einstellung entspricht die geometrische Generalisierung der Gaußschen Diffusion), Grüne Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 0$ , Blaue Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 1$ , Rote Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 1$ .

### 6.2.1 Phänomenologische Betrachtung

Das von uns betrachtete künstliche DHM hat  $80 \times 80$  Rasterpunkte und ist von seinem Mittelpunkt aus betrachtet in vier Quadranten unterteilt, die jeweils unterschiedliche großräumige Oberflächenstrukturen darstellen. Im einzelnen:

1. Eine Mischstruktur aus einem Quader, einem Kegel und einem konvex abfallenden Hang.
2. Eine Stufenpyramide.
3. Zwei gekreuzte Kammstrukturen, von denen die schräg von links unten nach rechts oben verlaufende höher ist, als die senkrecht hierzu verlaufende.
4. Ein „Vulkankegel“ mit oben angrenzender Quermauer.

In Abbildung 6.11 und 6.12 werden die Ergebnisse der geometrischen Generalisierung am Beispiel der durch  $\sigma = 1.5$  Pixel und  $\sigma = 4.1$  Pixel bezeichneten Generalisierungsstufen für unterschiedliche Kombinationen der Parameter  $\alpha_p, \alpha_A \in \{0, 1, 2\}$  gezeigt. Im Folgenden werden wir diese Ergebnisse unter den Gesichtspunkten der in Kapitel 4.1 formulierten Zielsetzung betrachten.

#### Regulierungsmöglichkeiten der Generalisierung durch $\alpha_p$

Zunächst betrachten wir in beiden Abbildungen die untere Reihe der Unterabbildungen (g), (h) und (i) mit  $\alpha_A = 0$ . Damit erhalten wir einen visuellen Eindruck von den isolierten Regulierungsmöglichkeiten der geometrischen Generalisierung durch den Prägnanz-Parameter  $\alpha_p$ . Je größer  $\alpha_p$ , desto mehr werden insbesondere die deutlich ausgeprägten Ecken und Spitzen der Oberfläche über den Verlauf der geometrischen Generalisierung erhalten. Diese punktaktigen Strukturen erscheinen im einzelnen Generalisierungsergebnis in betonter Form, da sie sich nach dem Generalisierungsvorgang durch eine in Relation mit ihrer Umgebung gesteigerte Krümmung hervorheben.

Eine besonders wichtige Eigenschaft der geometrischen Generalisierung ist in diesem Zusammenhang an den Ecken der Stufenpyramide (2. Quadrant) zu beobachten. Auf der Skalenstufe von  $\sigma = 1.5$  Pixel werden die Ecken durch eine Erhöhung von  $\alpha_p$  betont und auf der Skalenstufe von  $\sigma = 4.1$  Pixel sind die Ecken unabhängig von der Einstellung von  $\alpha_p$  weggeneralisiert worden. An die Stelle der einzelnen Ecken ist auf der höheren Skalenstufe die Stufenpyramide als Ganzes getreten und generalisiert worden,

## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle

was sich bei einer Erhöhung von  $\alpha_p$  durch eine Betonung der Pyramidenspitze ausdrückt. Betonung und Erhaltung von Strukturen ist somit wie gefordert an die räumliche Skala gebunden.

Die Einstellung von  $\alpha_p$  beeinflusst linienartige Strukturen wie Kanten, Rinnen und Grate nicht in ihrer gesamten Ausdehnung. Lokal bezüglich des Generalisierungskontextes besonders deutlich ausgeprägte linienartige Strukturen werden an den betreffenden Stellen lokal betont. Dies ist mit besonderer Deutlichkeit am Querbalken oberhalb des Vulkankegels (4. Quadrant) zu beobachten. Der Querbalken wird, wo er lokal frei steht, durch die Generalisierung kaum in seiner Oberflächenform verändert. In direkter Nähe zum „Vulkankegel“ findet eine Formveränderung statt. Lokal ist er dort (relativ) nicht prägnant, da andere Strukturen mit vergleichbaren Krümmungseigenschaften sich in der direkten Umgebung befinden. Somit bestätigt der visuelle Eindruck, dass  $\alpha_p$ , wie in Kapitel 4.1 gefordert, ein Regler für die skalenbezogene lokale Erhaltung und Betonung prägnanter Strukturen ist.

### Regulierungsmöglichkeiten der Generalisierung durch $\alpha_A$

Betrachten wir nun für einen visuellen Eindruck der isolierten Regulierungsmöglichkeiten des Anisotropie-Parameters  $\alpha_A$  in beiden Abbildungen die linke Reihe der Unterabbildungen (a), (d) und (g) mit  $\alpha_p = 0$ . Dort ist zu sehen, wie die Linienartigkeit von Strukturen während der Generalisierung betont wird, wenn  $\alpha_A$  erhöht wird. Die Betonung der Linienartigkeit führt zu einer Verlängerung von linienartigen Strukturen, die durch den Begriff „Ausfließen“ beschrieben werden kann. Besonders deutlich wird dies an den beiden gekreuzten Kammstrukturen (3. Quadrant), die umso deutlicher in Linienerichtung ausfließen, umso höher  $\alpha_A$  gewählt wurde. Einerseits werden so eventuelle Lücken in einem Linienverlauf geschlossen und mehrere Linienfragmente gruppieren sich zu einem geschlossenen Linienobjekt. Andererseits fließen auch getrennte Objekte, die nicht zusammen gehören, ineinander und gruppieren sich.

Dieses Verhalten zeigt einen deutlichen Bezug zu der gewählten räumlichen Skala, wie wiederum an der Stufenpyramide zu sehen ist. Auf der Skalenstufe von  $\sigma = 1.5$  Pixel werden die Stufenkanten der Pyramide durch eine Erhöhung von  $\alpha_p$  betont und auf der Skalenstufe von  $\sigma = 4.1$  Pixel sind die Stufenkanten unabhängig von der Einstellung von  $\alpha_p$  weggeneralisiert worden. An die Stelle der einzelnen Stufenkanten ist wiederum die Pyramide als Ganzes getreten. Das Verhalten der Generalisierung in Bezug auf den Anisotropie-Parameter  $\alpha_A$  gleicht in dieser Hinsicht vollständig dem in Bezug auf den Prägnanz-Parameter  $\alpha_p$ . Die visuelle Untersuchung bestätigt damit analog zur Betrachtung des Prägnanz-Parameters  $\alpha_p$ , dass  $\alpha_A$  ein Regler für die Erhaltung und Betonung der skalenbezogenen Ausrichtung von Strukturen ist.

### Regulierungsmöglichkeiten durch Kombination beider Parameter

Die Unterabbildungen (b), (c), (e) und (f) zeigen die Ergebnisse der geometrischen Generalisierung, bei denen  $\alpha_P$  und  $\alpha_A$  gemeinsam größer Null gesetzt wurden. Wir können hieran die Regulierungsmöglichkeit durch das Zusammenspiel beider Parameter betrachten.

Es ist an den beiden gekreuzten Kammstrukturen (3. Quadrant) zu sehen, dass das „Ausfließen“ von linienartigen Strukturen bei  $\alpha_A > 0$  durch eine Erhöhung von  $\alpha_P$  deutlich verringert wird. Dieses Verhalten kann man sich dadurch erklären, dass die Endpunkte linienartiger Strukturen prägnant sind und als solche durch die Einstellung von  $\alpha_P$  erhalten werden können.

Umgekehrt ist zu sehen, dass prägnante Strukturen in linienartiger Anordnung, wie zum Beispiel die Ecken der Stufenpyramide (2. Quadrant) bei  $\alpha_P > 0$ , sich durch eine Erhöhung von  $\alpha_A$  zu linienartigen Strukturen aggregieren können. Ebenso wird der Querbalken (4. Quadrant) nicht mehr nur partiell erhalten, wie es bei  $\alpha_P > 0$  und  $\alpha_A = 0$  der Fall ist, sondern in seiner vollen Ausdehnung.

Zusammenfassend sind beide Regler in Kombination zu benutzen, sonst fließen entweder linienartige Strukturen über ihren Bereich hinaus oder punktartige Strukturen in einem großräumigen linienartigen Zusammenhang stehen isoliert da und werden im Verlauf der Generalisierung entfernt, ohne dass sie durch die entsprechende großräumige linienartige Struktur ersetzt würden.

### 6.2.2 Geschätzter geometrischer Informationsgehalt

Wenn wir den Verlauf des geometrischen Informationsgehalts während der geometrischen Generalisierung des künstlichen DHM (Abbildung 6.13) betrachten, fällt ein Unterschied zu den Verläufen der vorher betrachteten „natürlichen“ DHM auf. Zu Beginn der Generalisierung fehlt die charakteristische „Beule“ im differenzierten Verlauf für  $\alpha > 0$ . Das deutet darauf hin, dass bei der Generalisierung des künstlichen DHM eine deutlich geringere Anpassung zwischen der Rekonstruktion und der Generalisierung stattfindet.

So werden zu Beginn der geometrischen Generalisierung von „natürlichen“ DHM einige geometrische Informationen der Oberfläche durch Glätten entfernt, weil sie nicht zu dem Generalisierungs-Modell passen. Im Folgenden sinkt der geometrische Informationsgehalt dann jedoch geringer als bei der Gaußschen Diffusion. Dieses anfängliche Entfernen von geometrischen Informationen findet bei der Generalisierung des künstlichen DHM in zumindest deutlich verringertem Umfang statt.



## 6.2 Geometrische Generalisierung künstlicher Höhenmodelle



(a)  $\alpha_P = 0, \alpha_\Lambda = 2$



(b)  $\alpha_P = 1, \alpha_\Lambda = 2$



(c)  $\alpha_P = 2, \alpha_\Lambda = 2$



(d)  $\alpha_P = 0, \alpha_\Lambda = 1$



(e)  $\alpha_P = 1, \alpha_\Lambda = 1$



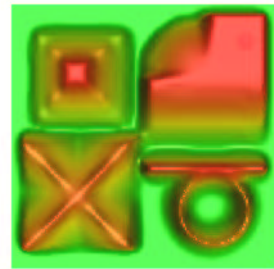
(f)  $\alpha_P = 2, \alpha_\Lambda = 1$



(g)  $\alpha_P = 0, \alpha_\Lambda = 0$



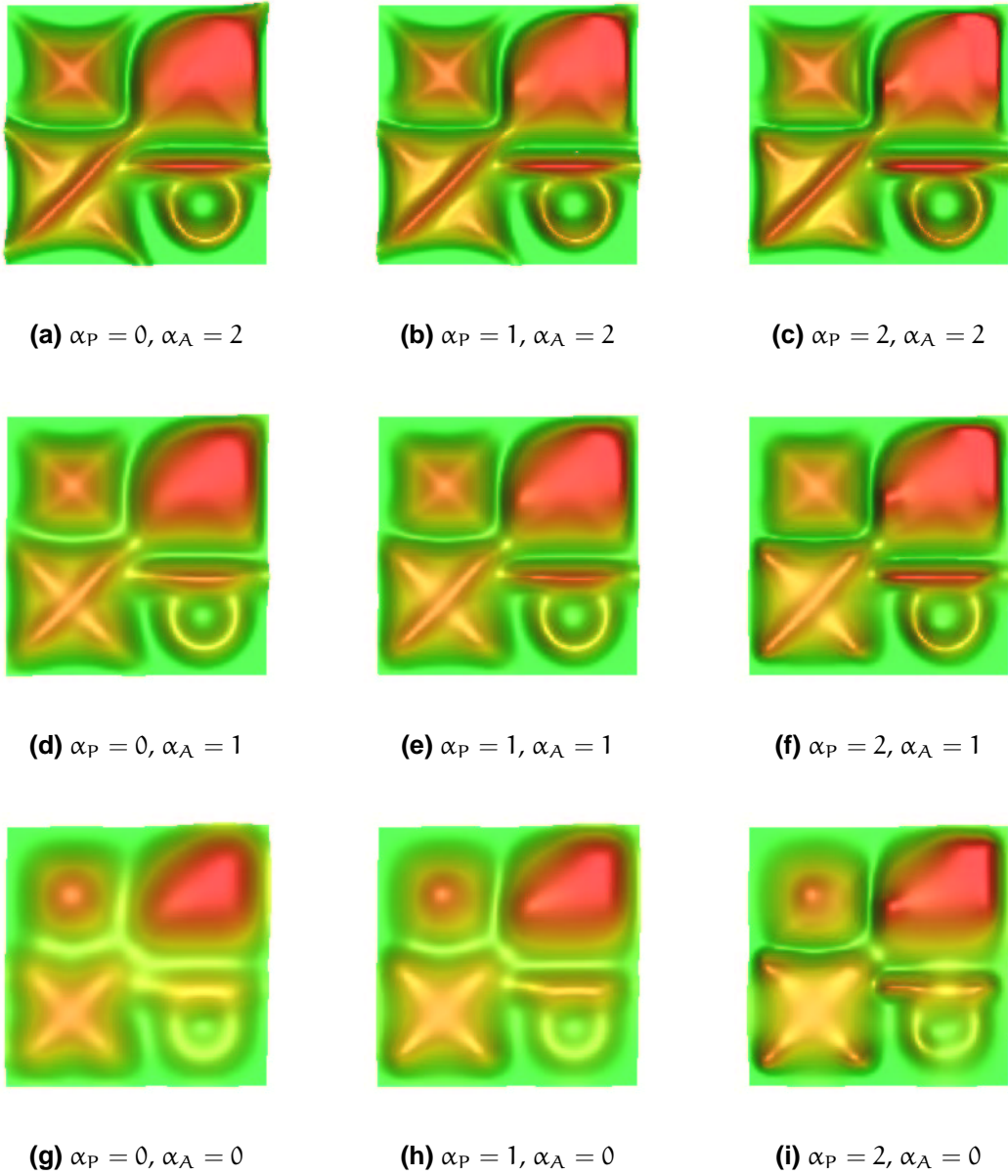
(h)  $\alpha_P = 1, \alpha_\Lambda = 0$



(i)  $\alpha_P = 2, \alpha_\Lambda = 0$

**Abbildung 6.11:** Geometrische Generalisierung eines künstlichen DHM für unterschiedliche Einstellungen der Parameter  $\alpha_P$  und  $\alpha_\Lambda$ , bei  $\sigma = 1.5$  Pixel und  $k = 5$ .

## 6 Beispiele



**Abbildung 6.12:** Geometrische Generalisierung eines künstlichen DHM für unterschiedliche Einstellungen der Parameter  $\alpha_P$  und  $\alpha_\Lambda$ , bei  $\sigma = 4.1$  Pixel und  $k = 5$ .

Es scheint, dass die rekonstruierte Oberfläche des künstlichen DHM dem Generalisierungs-Modell besser entspricht als die der „natürlichen“ DHM, da alle Strukturen eine räumliche Ausdehnung von mindestens einigen Pixeln haben und somit für das Generalisierungsverfahren als solche erkennbar sind. Kleinräumige Variationen kommen nicht vor und können somit auch nicht als Rauschen entfernt werden.

Da unser Generalisierungs-Modell von mehreren Parametern abhängt, erzeugt es für eine gegebene Oberfläche nicht nur eine lineare Folge von Generalisierungsergebnissen, sondern es spannt durch die Menge aller möglichen Generalisierungsergebnisse einen mehrparametrischen Raum auf. Für eine gegebene Parameterwahl entspricht eine geometrische Generalisierung einer Trajektorie in diesem Raum. Im idealisierten Fall beginnt diese Trajektorie an einem Punkt, der unabhängig von der Parameterwahl ist und der Skala  $\sigma = 0$  zugeordnet ist.

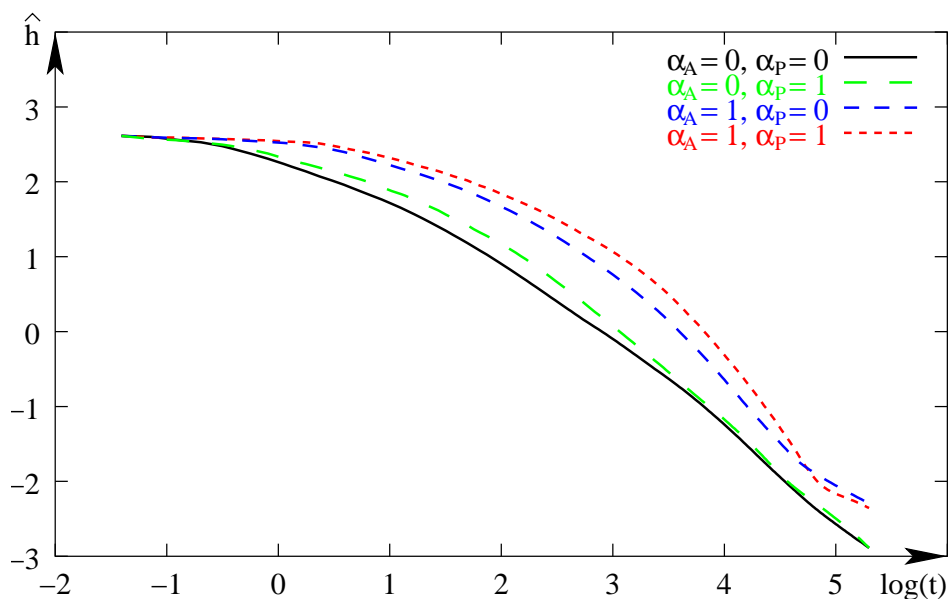
Wenn wir nun im nicht idealisierten Fall reale Daten haben, die zu einer Oberfläche rekonstruiert werden müssen und die Rekonstruktionsvorschrift zwar mit dem Generalisierungs-Modell, aber nicht mit der Parameterwahl der Generalisierungsvorschrift übereinstimmt, dann beginnt die Generalisierungs-Trajektorie nicht auf der idealisierten Trajektorie zur Parameterwahl sondern irgendwo daneben. Zu Beginn der geometrischen Generalisierung wird sich die reale Trajektorie der idealisierten annähern und erst im weiteren Verlauf nahezu deckungsgleich mit ihr verlaufen.

Wir meinen, dass sich in dem anfänglichen Verlauf des geometrischen Informationsgehalts einer geometrischen Generalisierung diese Modellanpassung widerspiegelt. Wenn in weiterführenden Arbeiten Rekonstruktionsvorschriften entwickelt werden, die mit dem Generalisierungs-Modell und der Parameterwahl übereinstimmen, sollte dies am Verlauf des geometrischen Informationsgehalts beim Übergang zwischen Rekonstruktion und Generalisierung erkennbar sein. Es steht damit ein Kontrollinstrument zur Beurteilung des Rekonstruktionsverhaltens einer speziellen Rekonstruktionsvorschrift zur Verfügung.

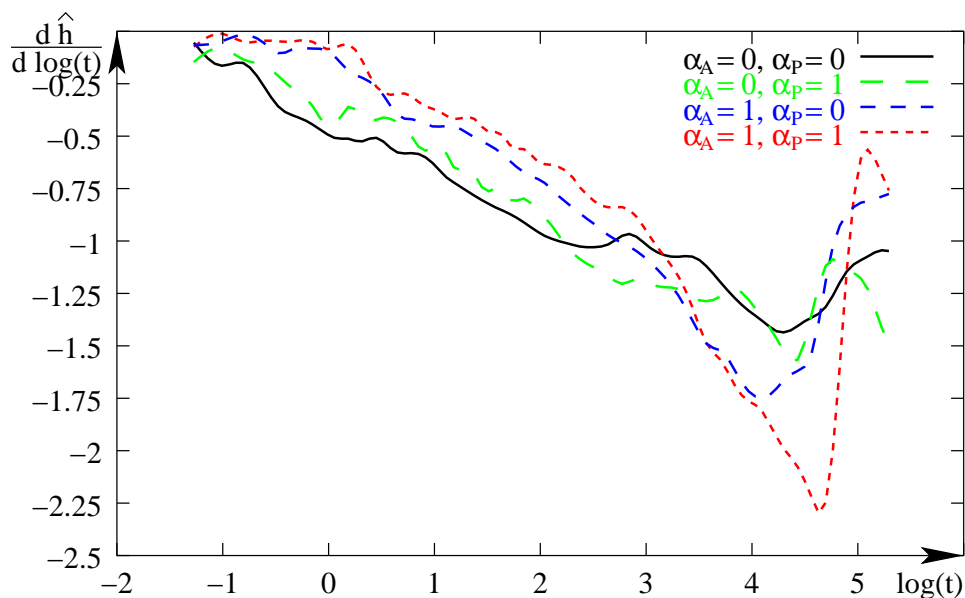
## 6.3 Weitere Beispiele

Als weitere Beispiele zeigen wir die Ergebnisse der geometrischen Generalisierung von digitalen Oberflächenmodellen einer Siedlung (Abbildung 6.14) und eines Häuserblocks (Abbildung 6.15) in Ravensburg, sowie eines digitalen Grauwertbildes (Abbildung 6.16). Da unser Verfahren auf sehr allgemeinen Annahmen beruht, sollte es sinnvoll möglich sein, auch an diesen Beispielen die Wirkungsweise des Generalisierungsverfahrens zu erkennen.

## 6 Beispiele

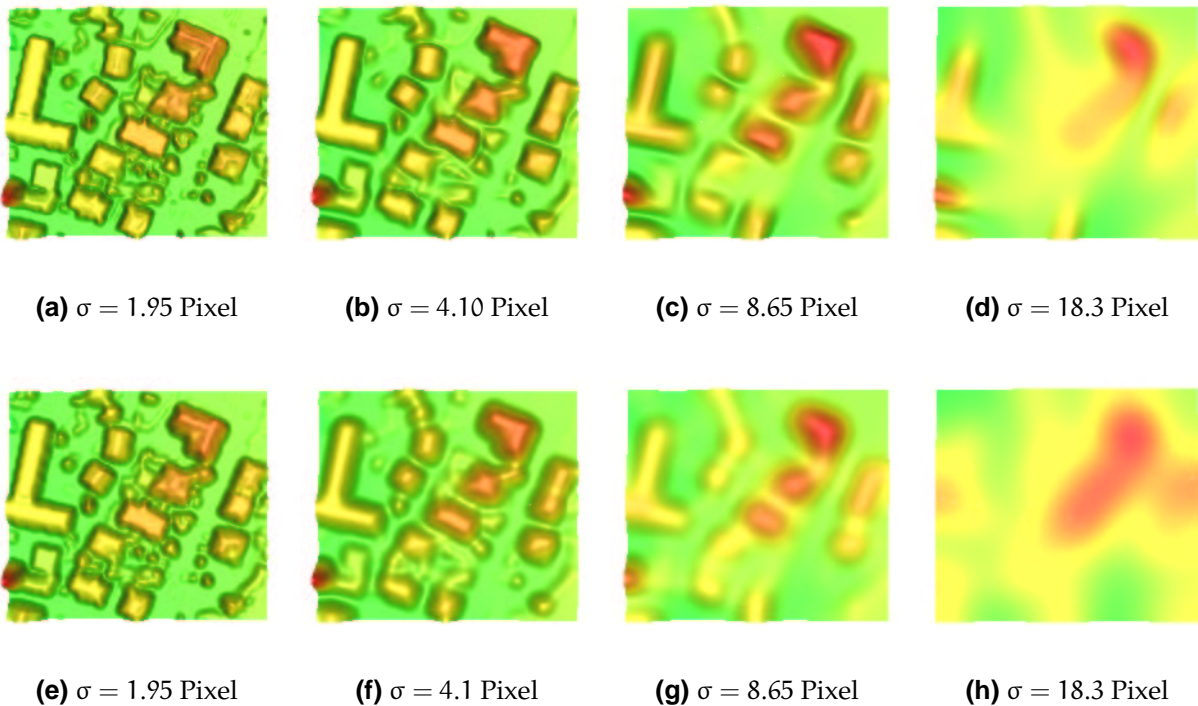


(a) Entropien des künstlichen DHM



(b) Differenzierte Entropien des künstlichen DHM

**Abbildung 6.13:** Verlauf der Entropien des künstlichen DHM **(a)** und der nach dem Logarithmus des Diffusionsparameters differenzierten Entropien **(b)** für unterschiedliche Parametereinstellungen der geometrischen Generalisierung in Abhängigkeit vom Logarithmus des Diffusionsparameters. *Parametereinstellungen:* Schwarze Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 0$  (in dieser Einstellung entspricht die geometrische Generalisierung der Gaußschen Diffusion), Grüne Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 0$ , Blaue Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 0$ ,  $\alpha_A = 1$ , Rote Linien:  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$ ,  $\alpha_A = 1$ .



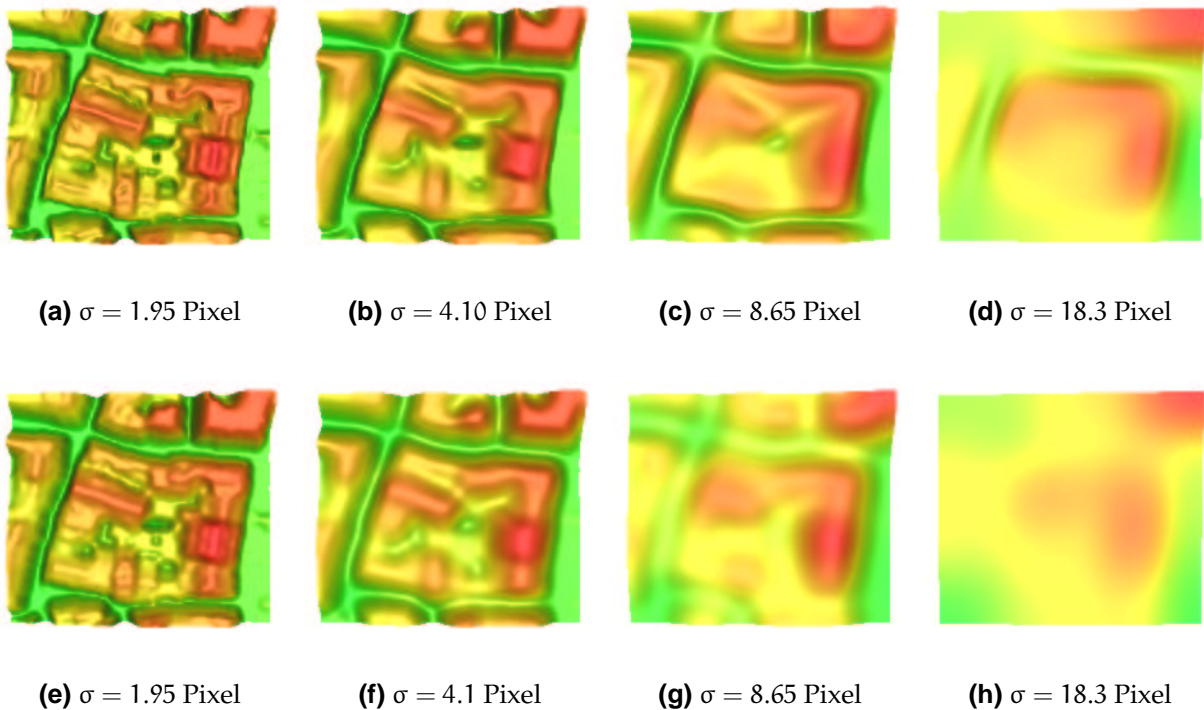
**Abbildung 6.14:** Vergleich zwischen geometrischer Generalisierung (Bilder (a) bis (d)) und Gaußscher Diffusion (Bilder (e) bis (h)) eines Digitalen Oberflächenmodells einer Siedlung in Ravensburg.

Die geometrische Generalisierung der Siedlung zeigt uns Grenzen des vorgestellten Verfahrens auf. Abgesehen davon, dass die Zielsetzung einer geometrischen Generalisierung von einzeln stehenden Häusern hier gar nicht formuliert ist, werden die einzelnen Häuser zwar teilweise durch die geometrische Generalisierung erhalten, aber ein großer Unterschied zur Gaußschen Diffusion ist nicht auszumachen.

Die geometrische Generalisierung des Häuserblocks zeigt mit gleichen Einschränkungen jedoch eine Perspektive auf. Die Schluchten zwischen den Häuserblöcken werden klar als linienartige Strukturen erkannt und werden im Verlauf der geometrischen Generalisierung gut erhalten, so dass die Blockstruktur der Bebauung deutlich hervor tritt. Das Generalisierungsverfahren ist demnach überall dort einsetzbar, wo die Annahmen, dass die Oberfläche aus punkt-, linien- und flächenartigen Strukturen zusammengesetzt ist, sinnvoll für die Oberflächenbeschreibung ist.

Die geometrische Generalisierung des digitalen Grauwertbildes „Lenna“ zeigt, wie die geometrische Generalisierung kleinräumige Strukturen aus dem Bild entfernt und die großräumigen in ihrem Formcharakter erhält. Dabei ist die erreichte Glättung auf jeder Skalenstufen mit der der Gaußschen Diffusion vergleichbar (Abbildung 6.17). Diese

## 6 Beispiele



**Abbildung 6.15:** Vergleich zwischen geometrischer Generalisierung (Bilder (a) bis (d)) und Gaußscher Diffusion (Bilder (e) bis (h)) eines Digitalen Oberflächenmodells eines Häuserblocks in Ravensburg.

Ergebnisse geben somit nochmals aus einer anderen Perspektive einen visuellen Eindruck von der Wirkungsweise des vorgestellten Verfahrens zur geometrischen Generalisierung.





(a)  $\sigma = 0.70$  Pixel



(b)  $\sigma = 0.90$  Pixel



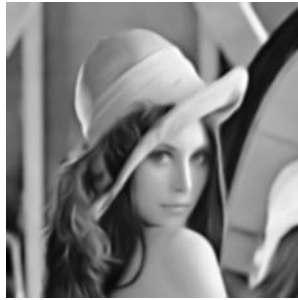
(c)  $\sigma = 1.15$  Pixel



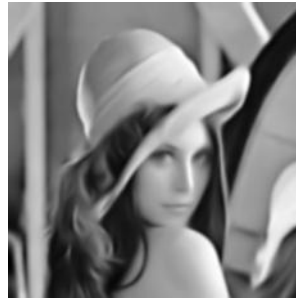
(d)  $\sigma = 1.50$  Pixel



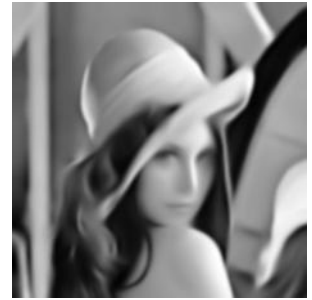
(e)  $\sigma = 1.95$  Pixel



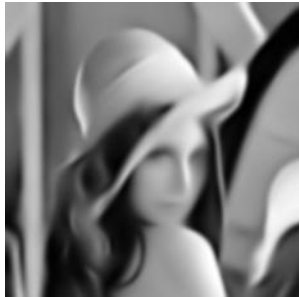
(f)  $\sigma = 2.50$  Pixel



(g)  $\sigma = 3.20$  Pixel



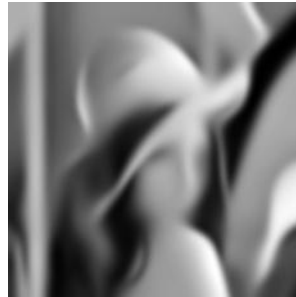
(h)  $\sigma = 4.10$  Pixel



(i)  $\sigma = 5.25$  Pixel



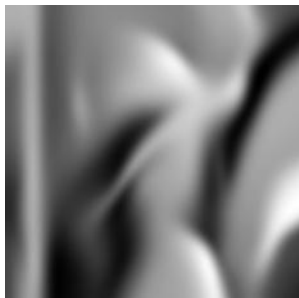
(j)  $\sigma = 6.75$  Pixel



(k)  $\sigma = 8.65$  Pixel



(l)  $\sigma = 11.10$  Pixel



(m)  $\sigma = 14.25$  Pixel



(n)  $\sigma = 18.30$  Pixel

**Abbildung 6.16:**  
Beispiel der Anwendung der Diffusionsgleichung (4.7) mit  $k = 5$ ,  $\alpha_P = 1$  und  $\alpha_A = 1$  auf ein digitales Grauwertbild (Lenna,  $256 \times 256$  Pixel).

## 6 Beispiele



**Abbildung 6.17:** Vergleich zwischen geometrischer Generalisierung (Bilder (a) bis (d)) und Gaußscher Diffusion (Bilder (e) bis (h)) des Digitalen Bildes „Lenna“.



## 7 Zusammenfassung

Die Generalisierung von DHM gliedert sich in die beiden Teilbereiche der geometrischen und der thematischen Generalisierung. Wir konnten in der vorliegenden Arbeit ein Werkzeug für die geometrische Generalisierung von DHM vorstellen. Auf Aspekte der thematischen Generalisierung sind wir dabei nur so weit eingegangen, wie es für die Behandlung der geometrischen Generalisierung notwendig war.

Für die geometrische Generalisierung haben wir zwei wesentliche Forderungen erarbeitet. Die aus der geometrischen Generalisierung resultierende Beschreibung muss auf der gewählten Skala einerseits geometrisch ausreichend exakt sein und andererseits den Formcharakter der Geländeoberfläche zutreffend erkennbar machen.

Die Forderung nach geometrischer Exaktheit (erste Forderung) haben wir erfüllt, indem wir jedem Punkt des generalisierten DHM die mittlere Höhe einer der gewählten Skala angepassten Umgebung des jeweils entsprechenden Geländepunktes zugewiesen haben. Der mathematischen Formalismus für dieses gewählte Vorgehen kann durch die Theorie der Skalenräume beschrieben werden. Die für die geometrische Generalisierung bedeutsamen Einzelheiten dieser Theorie haben wir ausführlich beschrieben und dargestellt, wie die geometrische Generalisierung als Skalenraum realisiert und, zur Erfüllung der zweiten Forderung, lokal adaptiert werden kann.

Um den Formcharakter der Geländeoberfläche zutreffend erkennbar zu machen (zweite Forderung), mussten wir zuerst die Frage beantworten, wie eine sprachliche Formbeschreibung in ein quantifizierbares Maß abgebildet werden kann. Hierzu haben wir ein DHM als Signal im Sinne der Signaltheorie und den Geländeverlauf als Signaltextur interpretiert. Für die geschätzten Texturparametern konnten wir eine Darstellung wählen, so dass sich diese zur quantitativen Beschreibung des Formcharakters und zur lokalen Adaption des Skalenraums der geometrischen Generalisierung eignen.

Zur Steuerung der geometrischen Generalisierung haben wir einen Satz von Steuerparametern festgelegt, die vom Anwender vorzugeben sind. Jeder dieser Parameter ist vollständig im Kontext der Generalisierung interpretierbar. Die vorgestellten Methoden können daher im Wesentlichen von allen Anwendern ohne Zusatzwissen über Si-

## 7 Zusammenfassung

gnaltheorie oder die Theorie der Skalenräume genutzt werden.

Es ist uns damit gelungen, Methoden zu entwickeln, die direkt zum Beispiel in ein GIS implementiert werden können. Dies bietet sich besonders an, da der Gaußsche Skalenraum, der in den von uns vorgestellten Methoden enthalten ist, zumindest in Form einer Approximation, wie zum Beispiel den Binomialfiltern, zur Standardausstattung von GIS gehört. Die von uns vorgestellten Methoden sind in dieser Hinsicht eine Ergänzung, beziehungsweise Erweiterung von etablierten Methoden, die, wie unsere in Kapitel 6 vorgestellten Ergebnisse gezeigt haben, eine deutliche Verbesserung darstellen können. Wie weitreichend die erzielten Verbesserungen sind, kann nur über weitergehende empirische Untersuchungen in den betreffenden Fachbereichen evaluiert werden. Zum Beispiel ist zu klären, welche Einschränkung es bedeutet, ein DHM durch eine Graphenfläche abzubilden. Für diese notwendigen Untersuchungen wäre eine vorhandene Implementation der vorgestellten Methoden in einem GIS sehr wertvoll. Wir hoffen gezeigt zu haben, dass der Aufwand einer GIS-Implementation gerechtfertigt ist.

Als Basis einer GIS-Implementation kann die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellte Implementation dienen. Diese stellt einen funktionsfähigen Prototypen dar, der primär die prinzipielle Umsetzbarkeit der vorgestellten Methoden belegen musste. Im Gegensatz zu einer GIS-Implementation war die Laufzeit bei der Erstellung der vorliegenden Implementation von sekundärem Interesse, was sich in einer für eine praktische Anwendung nicht akzeptabel langen Laufzeit (bis zu 8 Stunden bei den hier vorgestellten Beispielen) widerspiegelt. Durch Nutzung von modernen Techniken (beispielsweise dem Einsatz von hierarchischen oder adaptiven Methoden) sollte es möglich sein, die Laufzeit deutlich zu verkürzen.

Wir haben damit noch kein allgemeingültiges Generalisierungsverfahren für DHM entwickelt. Zumindest fehlt hierzu noch vollständig der Bereich der thematischen Generalisierung, der in der vorliegenden Arbeit von uns bewusst nicht bearbeitet wurde. Bei der thematischen Generalisierung können kleine Skalenschritte, die mit einem Wechsel des zu Grunde liegenden semantischen Modells verbunden sind, sprunghafte Änderungen im DHM notwendig machen. Solche sprunghaften Änderungen sind im Rahmen der vorgestellten Methoden, die auf der Theorie der Skalenräume basieren, nicht zu beherrschen. Hier müssen weiterführende Arbeiten ansetzen, die auf eine konzeptionelle Verknüpfung der thematischen Generalisierung von DHM mit den hier vorgestellten Methoden zur geometrischen Generalisierung von DHM zielen. Nur soweit sich die thematische Generalisierung auf kleine Änderungen bei einem kleinen Skalenschritt beschränkt, besteht die Möglichkeit zu unseren vorgestellten Methoden über das Diffusionstensorfeld anzukoppeln, wie wir es für das thematische Merkmal des Formcharakters in der vorliegenden Arbeit gezeigt haben.

Eine weitere offene Frage ist es, wie die Rekonstruktion der Daten und die anschlie-

ßende geometrische Generalisierung in einem einheitlichen Modell zu behandeln ist. Für die Rekonstruktion der Daten kann auf ausgefeilte Regularisierungsmethoden (siehe zum Beispiel Blake und Zisserman 1987) zurückgegriffen werden. Zur Behandlung in einem einheitlichen Modell fehlt der glatte Übergang von dem zu wählenden Regularisierungsmodell zu dem in dieser Arbeit vorgestellten Diffusionsmodell. Scherzer und Weickert (2000) liefern hierzu erste Ansätze indem sie den Zusammenhang von Regularisierungsmethoden mit Diffusionsmethoden im Bereich der Digitalen Bildverarbeitung analysieren. In einer weiterführenden Arbeit zeigen Radmoser et al. (2000), dass Regularisierungsmethoden geeignet sind, Skalenraum-Eigenschaften zu erfüllen. Diese Grundlagen sollten es möglich machen, in naher Zukunft einheitliche Modelle von Rekonstruktion und geometrischer Generalisierung zu präsentieren.

Insgesamt haben wir mit der vorliegenden Arbeit einen bereits konkret anwendbaren Schritt zu einer umfassenden Methodensammlung zur Generalisierung von DHM geleistet und klar umrissene Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten in diese Richtung identifiziert.

## 7 Zusammenfassung

# Literatur

- Alvarez, L., F. Guichard, P.-L. Lions und J.-M. Morel (1993). Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. *Archive Rational Mechanics and Analysis* 123, 199–257.
- Babaud, J., A. P. Witkin, M. Baudin und R. O. Duda (1986). Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 8(1), 26–33.
- Blake, A. und A. Zisserman (1987). *Visual Reconstruction*. MIT Press.
- Braess, D. (1992). *Finite Elemente*. Springer.
- Brügelmann, R. und W. Förstner (1992). Noise Estimation for Color Edge Extraction. In W. Förstner und S. Ruwiedel (Hrsg.), *Robust Computer Vision*, Seiten 90–107. Wichmann, Karlsruhe.
- Carmona, R. und S. Zhong (1998). Adaptive Smoothing Respective Feature Directions. *IEEE Transactions on Image Processing* 7, 353–358.
- Castleman, K. R. (1979). *Digital Image Processing*. Prentice Hall.
- Courant, R. und D. Hilbert (1924). *Methoden der mathematischen Physik* (1 Aufl.), Band 1. Springer.
- Cover, T. M. und J. A. Thomas (1991). *Elements of Information Theory*. Wiley.
- Deriche, R. (1993). Recursively Implementing the Gaussian and Its Derivatives. Technischer Bericht 1893, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA).
- Dikau, R. (1988). *Entwurf einer geomorphographisch-analytischen Systematik von Reliefseinheiten*. Number 5 in Heidelberger geographische Bausteine. Selbstverlag des Geographischen Instituts der Universität Heidelberg.
- do Carmo, M. P. (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen* (3 Aufl.). Vieweg, Braunschweig.
- Duda, R. O. und P. E. Hart (1973). *Pattern Classification and Scene Analysis*. Wiley.

## LITERATUR

- Ebner, H. (1979). Zwei neue Interpolationsverfahren und Beispiele für ihre Anwendung. *Bildmessung und Luftbildwesen* 47, 15–27.
- Ebner, H. (1983). Berücksichtigung der lokalen Geländeform bei der Höheninterpolation mit finiten Elementen. *Bildmessung und Luftbildwesen* 51(1), 3–9.
- Edelsbrunner, H. (1987). *Algorithms in Computational Geometry*. Springer.
- Evans, I. S. (1980). An Integrated System of Terrain Analysis and Slope Mapping. *Zeitschrift für Geomorphologie, Neue Folge, Supplementband* 36, 274–295.
- Evans, I. S. und C. J. McClean (1995). The Land Surface is not Unifractal: Variograms, Cirque Scale and Allometry. Siehe Pike und Dikau (1995), Seiten 127–147.
- Förstner, W. (1991). *Statistische Verfahren für die automatische Bildanalyse und ihre Bewertung bei der Objekterkennung und -vermessung*, Band 370 der Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission.
- Förstner, W. (2003). Notions of Scale in Geosciences. In H. J. Neugebauer und C. Simmer (Hrsg.), *Dynamics of Multiscale Earth Systems*, Seiten 17–39. Springer.
- Frederiksen, P., O. Jacobi und K. Kubik (1985). A Review of Current Trends in Terrain Modelling. *ITC Journal* (2), 101–106.
- Göbel, P., H. Leser, G. Stäblein und R. Werner (1975). *Geomorphologische Kartierung*. Selbstverlag des Instituts für Physische Geographie der Freien Universität Berlin.
- Gottschalk, H.-J. (1972). Die Generalisierung von Isolinen als Ergebnis der Generalisierung von Flächen. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 97(11), 489–494.
- Hake, G. (1982). *Kartographie I* (6 Aufl.). Walter de Gruyter.
- Haralick, R. M., L. T. Watson und T. J. Laffey (1983). The Topographic Primal Sketch. *International Journal of Robotics Research* 2(1), 50–72.
- Hardy, R. L. (1971). Multiquadratic Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research* 76(8), 1905–1915.
- Heitzinger, D. und H. Kager (1999). Hochwertige Geländemodelle aus Höhenlinien durch wissensbasierte Klassifikation von Problemgebieten. *Photogrammetrie · Fernerkundung · Geoinformation* 1999(1), 29–40.
- Hirano, M. (1976). Mathematical Model and the Concept of Equilibrium in Connection with Slope Shear Ratio. *Zeitschrift für Geomorphologie, Neue Folge, Supplementband* 25, 50–71.
- Hoschek, J. und D. Lasser (1989). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner.

- Hummel, R. A. (1986). Representations Based on Zero-Crossings in Scale-Space. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '86 Proceedings)*, Seiten 204–209. IEEE.
- Iijima, T. (1962). Basic Theory on Normalization of a Pattern (in Case of Typical One-Dimensional Pattern). *Bulletin of Electrical Laboratory* 26, 368–388. (in Japanese).
- Imhof, E. (1950). *Gelände und Karte*. Eugen Rentsch.
- Imhof, E. (1965). *Kartographische Geländedarstellung*. Walter de Gruyter.
- Imhof, E. (1972). *Thematische Kartographie*, Band 10 der Reihe *Lehrbuch der Allgemeinen Geographie*. Walter de Gruyter.
- Jackson, J. D. (1983). *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter.
- Jähne, B. (1993). *Digitale Bildverarbeitung* (3 Aufl.). Springer.
- Johnson, C. (1987). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press.
- Koenderink, J. J. (1984). The Structure of Images. *Biological Cybernetics* 50, 363–370.
- Koenderink, J. J. und A. J. van Doorn (1986). Dynamic Shape. *Biological Cybernetics* 53, 383–396.
- Koenderink, J. J. und A. J. van Doorn (1997). Image Structure. In E. Paulus und F. M. Wahl (Hrsg.), *Mustererkennung 1997 (DAGM '97 Proceedings)*, Informatik Aktuell, Seiten 3–35. Springer.
- Kraus, K. und N. Pfeifer (1998). Determination of Terrain Models in Wooded Areas with Airborne Laser Scanner Data. *ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing* 53, 193–203.
- Lindeberg, T. (1991). *Discrete Scale-Space Theory and the Scale-Space Primal Sketch*. Doktorarbeit, Royal Institute of Technology, Department of Numerical Analysis and Computer Science, Stockholm, Sweden.
- Lindeberg, T. (1994). *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Kluwer.
- Lindeberg, T. (1997). *On the Axiomatic Formulation of Linear Scale-Space*, Kapitel 6, Seiten 75–97. In Sporring, Nielsen, Florack und Johansen (1997).
- Lindenberger, J. (1986). ARIMA Processes for Modelling Digital Terrain Profiles. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing* 26(3/2), 427–441.
- Makarovič, B. (1972). Information Transfer in Reconstruction of Data from Sampled Points. *Photogrammetria* 28(4), 111–130.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature* (3 Aufl.). New York, USA: W. H. Freeman and Company.

## LITERATUR

- Marr, D. (1982). *Vision*. W. H. Freeman and Company.
- Miller, C. L. und R. A. LaFlamme (1958). The Digital Terrain Model – Theory & Application. *Photogrammetric Engineering* 24, 433–442.
- Molenaar, M. (1989). Single Valued Vector Maps – A Concept in Geographic Information Systems. *Geo-Informationssysteme* 2(1), 18–26.
- Nielsen, M., P. Johanson, O. F. Olsen und J. Weickert (Hrsg.) (1999). *Scale-Space Theories in Computer Vision (Scale-Space'99 Proceedings)*, Band 1682 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- Nogami, M. (1995). Geomorphometric Measures for Digital Elevation Models. Siehe Pike und Dikau (1995), Seiten 53–67.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (3 Aufl.). McGraw-Hill.
- Perona, P. und J. Malik (1987). Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. In *IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision (Proceedings)*, Seiten 16–22.
- Perona, P. und J. Malik (1990). Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12(7), 629–639.
- Pike, R. J. und R. Dikau (Hrsg.) (1995). *Advances in Geomorphometry – Proceedings of the Walter F. Wood Memorial Symposium*, Band 101 der Reihe *Zeitschrift für Geomorphologie, Neue Folge, Supplementband*. Gebrüder Borntraeger, Berlin - Stuttgart.
- Preparata, F. P. und M. I. Shamos (1985). *Computational Geometry*. Springer.
- Radmoser, E., O. Scherzer und J. Weickert (2000). Scale-Space Properties of Nonstationary Iterative Regularization Methods. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 11, 96–114.
- Reimer, U. (1991). *Einführung in die Wissensrepräsentation*. Teubner.
- Ritz, W. (1909). Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 135, 1–61.
- Scherzer, O. und J. Weickert (2000). Relations Between Regularization and Diffusion Filtering. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 12, 43–63.
- Schwarz, H. R. (1991). *Methode der finiten Elemente* (3 Aufl.). Teubner.
- Shannon, C. E. und W. Weaver (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press.



- Sporring, J., M. Nielsen, L. Florack und P. Johansen (Hrsg.) (1997). *Gaussian Scale-Space Theory*. Kluwer.
- Sporring, J. und J. Weickert (1997). On Generalized Entropies and Scale-Space. Technischer Bericht DIKU-96/37, University of Copenhagen.
- Stephani, M. (1975). Arbeitskreis „Numerische Photogrammetrie“ der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie und Fernerkundung, Bericht von der 3. Tagung am 4. November 1974 in Bonn. *Bildmessung und Luftbildwesen* 43(3), 116–117.
- Tempfli, K. (1982). *Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse*. Doktorarbeit, Technische Universität Wien. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 22.
- ter Haar Romeny, B. M. (Hrsg.) (1994). *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*. Kluwer.
- ter Haar Romeny, B. M., L. Florack, J. Koenderink und M. Viergever (Hrsg.) (1997). *Scale-Space Theory in Computer Vision (Scale-Space'97 Proceedings)*, Band 1252 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- Töpfer, F. (1963). Untersuchungen zum Anwendungsbereich des Wurzelgesetzes bei kartographischen Generalisierungen. *Vermessungstechnik* 11(11), 179–186.
- Weibel, R. (1989). *Konzepte und Experimente zur Automatisierung der Reliefgeneralisierung*, Band 15 der Reihe *Geo-Processing*. Geographisches Institut, Universität Zürich.
- Weickert, J. (1994). Scale-Space Properties of Nonlinear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor. Technischer Bericht 110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern.
- Weickert, J. (1998). *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner.
- Weickert, J. (1999). Coherence-Enhancing Diffusion Filtering. *International Journal of Computer Vision* 31, 111–127.
- Witkin, A. P. (1983). Scale-Space Filtering. In *Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI '83 Proceedings)*, Band 2, Seiten 1019–1022.
- Yuille, A. L. (1988). The Creation of Structure in Dynamic Shape. In *Second International Conference on Computer Vision (ICCV '88 Proceedings)*, Seiten 685–689. IEEE.
- Zevenbergen, L. W. und C. R. Thorne (1987). Quantitative Analysis of Land Surface Topography. *Earth Surface Process and Landforms* 12, 47–56.
- Zienkiewicz, O. C. (1984). *Methode der finiten Elemente* (2 Aufl.). Hanser.